Florin Constantin

MECANICA

TEORIE ȘI APLICAȚII

EDITURA
LUX LIBRIS

Prof.dr.ing. FLORIN CONSTANTIN

MECANICA

TEORIE ȘI APLICAȚII

EDITURA LUX LIBRIS®
BRAȘOV
2011

Recenzenți ştiințifici: **prof.dr.ing.mat. Sorin Vlase**
Universitatea *Transilvania* Braşov
prof.dr.mat. Dumitru Nicoară
Universitatea *Transilvania* Braşov
Consilier editorial: **prof.dr.ing. Florin Andreescu**
Tehnoredactare: **ing. Alexandru Moraru**
Coperta şi grafica: **dr.ing. Bogdan Andreescu**
Corectura: **prof.dr.ing. Florin Constantin**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Constantin Florin
Mecanica - teorie şi aplicații / prof. dr. ing. Florin Constantin; ed. prof. dr. ing. Florin Andreescu. Braşov : Ed. Lux Libris, 2011
Bibliogr.
ISBN 978-973-131-104-3

I. Andreescu Florin (ed.)

531.

© 2011

ISBN 978-973-131-104-3

Prefață

Mecanica este una dintre ştiintele fundamentale ale naturii, alături de fizică, chimie şi biologie, ştiinte care, la rândul lor studiază alte forme de mişcare ale materiei, respectiv. fizica, chimia şi biologica. Mecanica studiaza legile obiective ale echilibrului şi ale mişcării mecanice a sistemelor materiale.

Prezentul curs de Mecanica se adreseaza în primul rând studenților de la Facultatea de Design de Produs şi Mediu, toate specializarile precum şi studenților de la Facultatea de Construcții care au în programă, această disciplina.

Lucrarea de față este rodul activității didactice şi ştiințifice a autorului desfăşurată pe parcursul celor 35 de ani în cadrul Catedrei de Mecanică a Universității " Transilvania" din Braşov

Cursul cuprinde într-o succesiune clasică, cele trei diviziuni ale

Mecanicii: Statica , Cinematica şi Dinamica prezentate pe parcursul celor 15 capitole.

În cadrul cursului toată atenţia a fost acordată explicării fenomenelor şi însuşirii metodelor de lucru , folosite în rezolvarea problemelor prezentate la sfârşitul fiecărui capitol. Uneori s-a apelat la intuiţie, evitând demonstraţiile matematice laborioase.

De asemenea , s-a asigurat o corelare a cunoştinţelor prezentate în curs cu cele de la alte discipline din planul de invaţământ , evitând suprapunerile.

Lucrarea , prin conţinutul ei şi modul cum este structurată , vine în sprijinul studenţilor pentru a trezi interesul şi pasiunea pentru această disciplină de cultură tehnică generală.

Brasov , 1 .03. 2011

Prof.univ.dr.ing.dr.h.c. Ioan CURTU
Membru titular al Academiei de Stiinte Tehnice din Romania
Membru al Academiei de Stiinte ale Naturii a Federatiei Ruse

Cuprins

1. Introducere în mecanică 11
1.1. Obiectul şi diviziunile mecanicii 13
1.2. Modele simplificatoare utilizate în mecanică 14
1.3. Noţiuni şi principii fundamentale 14

STATICA

2. Reducerea sistemelor de forţe aplicate unui rigid 17
2.1. Forţa ca vector alunecător 19
2.2. Momentul polar al forţei 21
2.3. Momentul axial al forţei 23
2.4. Torsorul de reducere al unui sistem de forţe într-un pol 24
2.5. Cuplu de forţe 26
2.6. Variaţia elementelor torsorului faţă de schimbarea polului de reducere 27
2.7. Invarianţii unui sistem de forţe faţă de schimbarea polului de reducere 29
2.8. Axa centrală a unui sistem de forţe oarecare 31
2.9. Teorema lui Varignon 32
2.10. Reducerea sistemelor particulare de forţe 32
2.10.1. Reducerea sistemelor de forţe concurente. 33
2.10.2. Reducerea sistemelor de forţe coplanare 34
2.10.3. Reducerea sistemelor de forţe paralele 35
2.10.4. Reducerea forţelor distribuite. 37
2.11. Probleme rezolvate 39
2.12. Probleme propuse 49
3. Centre de masă 55
3.1. Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale 57
3.2. Centrul de masă al corpurilor omogene simple 60
3.3. Centrul de masă al corpurilor omogene complexe 64
3.4. Probleme rezolvate 66
3.5. Probleme propuse 70
4. Statica punctului material 75

4.1. Echilibrul forţelor ce acţionează asupra punctului material liber 77
4.2. Punctul material supus la legături fără frecare 78
4.2.1. Legăturile mecanice ale punctului material 78
4.3. Punctul material supus la legături cu frecare 81
4.3.1. Frecarea de alunecare. Legile frecării uscate 81
4.3.2. Echilibrul punctului material pe o suprafaţă aspră 84
4.3.3. Echilibrul punctului material pe o curbă aspră 85
4.4. Probleme rezolvate 86
4.5. Probleme propuse 90
5. Statica solidului rigid 93
5.1. Echilibrul forţelor ce acţionează asupra rigidului liber 95
5.2. Echilibrul rigidului supus la legături ideale 96
5.2.1. Legăturile mecanice ale rigidului. 96
5.3. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare 103
5.3.1. Rigidul rezemat cu frecare. 103
5.3.2. Frecarea de alunecare. 105
5.3.3. Frecarea de rostogolire. 105
5.3.4. Frecarea de pivotare în cazul lagărului axial. 107
5.3.5. Frecarea în articulaţii sau lagărul radial cu joc. 109
5.3.6. Frecarea firelor pe suprafaţe cilindrice. 111
5.3.7. Frecarea în scripeţi. 113
5.4. Probleme rezolvate 116
5.5. Probleme propuse 124
6. Statica sistemelor de solide rigide 131
6.1. Clasificarea sistemelor de corpuri şi a forţelor de legătură 133
6.2. Teoreme pentru studiul sistemului de rigide 135
6.2.1. Teorema echilibrului părţilor (separării corpurilor). 135
6.2.2. Teorema solidificării (rigidizării corpurilor). 138
6.3 Grinzi cu zăbrele.....139
6.3.1 Definiţii. Ipoteze. 139
6.3.2. Metode analitice pentru determinarea eforturilor din bare. 142
6.4. Probleme rezolvate 147
6.5. Probleme propuse 151

CINEMATICA

7. Cinematica punctului material 159
7.1. Noţiuni generale ale cinematicii 161
7.1.1. Traiectoria 161
7.1.2. Viteza punctului. 162
7.1.3. Acceleraţia. 163
7.1.4. Viteza şi acceleraţia unghiulară. 165
7.1.5. Formulele lui Poisson. 166
7.2. Studiul mişcării punctului în diferite sisteme de referinţă . 167
7.2.1. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate carteziene. 167
7.2.2. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate cilindrice şi polare 168
7.2.3. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate naturale (triedrul lui Frenet). 171
7.2.4. Calculul razei de curbură a traiectoriei 172
7.3. Mişcări particulare ale punctului material 174
7.3.1. Mişcarea uniformă a punctului. 174
7.3.2. Mişcarea uniform variată. 175
7.3.3. Mişcarea circulară. 177
7.3.4. Mişcarea oscilatorie armonică. 179
7.4. Probleme rezolvate 180
7.5. Probleme propuse 189
8. Cinematica solidului rigid 195
8.1. Mişcarea generală a rigidului..... 197
8.1.1. Viteza unghiulară instantanee a rigidului. 197
8.1.2. Distribuţia vitezelor 199
8.1.3. Distribuţia acceleraţiilor 200
8.2. Mişcarea de translaţie 202
8.2.1. Definiţie, exemple, grade de libertate 202
8.2.2. Distribuţia vitezelor 203
8.2.3. Distribuţia acceleraţiilor 203
8.3. Mişcarea de rotaţie cu axă fixă 204
8.3.1. Definiţie, exemple, grade de libertate 204
8.3.2. Distribuţia vitezelor 205
8.3.3. Distribuţia acceleraţiilor 206

8.4. Mişcarea elicoidală 207
8.4.1. Definiție, exemple, grade de libertate 207
8.4.2. Distribuția vitezelor 208
8.4.3. Distribuția acceleraţiilor 209
8.4.4. Mişcarea de şurub. 210
8.5. Mişcarea plan paralelă 211
8.5.1. Definiție, exemple, grade de libertate 211
8.5.2. Distribuția vitezelor 213
8.5.3. Centrul instantaneu de rotație. Baza şi rostogolitoarea 214
8.5.4. Distribuția acceleraţiilor 217
8.5.5. Polul acceleraţiilor 218
8.6. Mişcarea cu punct fix 220
8.6.1. Definiție, exemple, grade de libertate 220
8.6.2. Distribuția vitezelor 221
8.6.3. Distribuția acceleraţiilor 223
8.7. Probleme rezolvate 224
8.8. Probleme propuse 234
9. Mişcarea relativă 239
9.1. Mişcarea relativă a punctului material 241
9.1.1. Generalităţi. 241
9.1.2. Derivata absolută şi relativă (locală) a unui vector. . 242
9.1.3. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a punctului. 243
9.1.4. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a punctului. 244
9.2. Mişcarea relativă a rigidului 246
9.2.1. Generalităţi. 246
9.2.2. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a rigidului. 246
9.2.3. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a rigidului 247
9.3. Probleme rezolvate 248
9.4. Probleme propuse 252

DINAMICA

10. Noţiuni specifice în dinamică 257
10.1. Generalităţi 259

10.2. Lucrul mecanic 260
10.2.1. Lucrul mecanic al forţelor ce acţionează asupra punctului material. 260
10.2.2. Lucrul mecanic al forţelor ce acţionează asupra rigidului..... 265
10.3. Puterea mecanică 268
10.4. Randamentul mecanic 269
10.5. Momentele de inerţie mecanice 270
10.5.1. Momentele de inerţie mecanice ale rigidului. 271
10.5.2. Momentele de inerţie ale corpurilor de rotaţie. ... 275
10.5.3. Variaţia momentelor de inerţie la translaţia axelor. 277
10.5.4. Variaţia momentelor de inerţie la rotaţia axelor. .. 279
10.6. Energia mecanică 280
10.6.1. Energia cinetică. 281
10.6.2. Energia potenţială 285
10.7. Impulsul 286
10.8. Momentul cinetic 287
10.9. Torsorul vectorilor impuls pentru diferie corpuri în mişcare 290
10.10. Probleme rezolvate 296
10.11. Probleme propuse 307
11. Teoremele fundamentale ale dinamicii 315
11.1. Teorema variaţiei energiei cinetice 317
11.1.1. Cazul punctului material. 317
11.1.2. Cazul solidului rigid. 318
11.1.3. Teorema conservării energiei mecanice. 319
11.2. Teorema impulsului.....319
11.2.1. Cazul punctului material. 319
11.2.2. Cazul solidului rigid 320
11.2.3. Teorema conservării impulsului. 320
11.3. Teorema momentului cinetic 321
11.3.1. Cazul punctului material. 321
11.3.2. Cazul solidului rigid. 321
11.3.3. Teorema conservării momentului cinetic. 322
11.4. Probleme rezolvate 323
11.5. Probleme propuse 329
12. Principiul lui d'Alembert 349

12.1. Forţa de inerţie 351
12.2. Torsorul fortelor de inertie 354
12.3. Probleme rezolvate 356
12.4. Probleme propuse 375
13. Dinamica punctului material 385
13.1. Dinamica punctului material liberI 387
13.2. Dinamica punctului material cu legături 389
13.3. Dinamica punctului material în mişcare relativă 391
13.3.1. Ecuaţia fundamentală a mişcării relative. 391
13.3.2. Cazul forţelor complementare nule. Reper inerţial... 392
13.3.3. Repausul relativ. 392
13.4. Probleme rezolvate 393
13.5. Probleme propuse 400
14. Noţiuni de vibraţii mecanice 417
14.1. Definiţii. Clasificarea vibraţiilor mecanice 419
14.2. Vibraţii libere neamortizate 420
14.2.1. Constantele elastice ale câtorva sisteme mecanice 420
14.2.2. Stabilirea ecuaţiei diferenţiale 422
14.3. Vibraţii libere amortizate 424
14.4. Vibraţii forţate neamortizate 427
14.5. Vibraţii forţate amortizate 429
14.6. Probleme rezolvate 432
14.7. Probleme propuse 435
15. Elemente de mecanică analitică 439
15.1 Deplasări reale Şi deplasări virtuale 441
15.2 Principiul lucrului mecanic virtual (deplasărilor virtuale) . 445
15.3 Principiul vitezelor virtuale (puterilor virtuale) 446
15.4 Principiul lui Torricelli 447
15.5 Ecuaţiile lui Lagrange 448
15.5.1 Forţe generalizate 448
15.5.2 Ecuaţiile lui Lagrange de speţa întâi 450
15.5.3 Ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua 451
15.5.4 Ecuaţiile lui Lagrange în cazul forţelor conservative 453
15.6. Probleme rezolvate 454
15.7. Probleme propuse 473
Bibliografie 483

1.

INTRODUCERE ÎN MECANICĂ

1.1. Obiectul şi diviziunile mecanicii 13
1.2. Modele simplificatoare utilizate în mecanică 14
1.3. Noţiuni şi principii fundamentale 14

1

INTRODUCERE ÎN MECANICĂ

1.1. OBIECTUL ŞI DIVIZIUNILE MECANICII

Mecanica este ştiinţa fundamentală a naturii care studiază legile obiective ale echilibrului şi a mişcării mecanice a corpurilor materiale, cu scopul aplicării lor în activitatea productivă a omului.

Obiectul acestui curs îl constituie Mecanica clasică numită şi Mecanica newtoniană. Bazele acestei mecanici au fost puse de renumitul matematician, fizician şi astronom englez ISAAC NEWTON (1643-1727) în lucrarea fundamentală "Principiile matematice ale filozofiei naturale", publicată în 1686. În cadrul acestui curs de Mecanică se studiază legile generale ale echilibrului, mişcării şi interacţiunii corpurilor materiale macroscopice, considerate solide rigide (nedeformabile), care se deplasează cu viteze mici în comparaţie cu viteza de propagare a luminii în vid.

Potrivit unei împărţiri clasice, urmărind intr-o oarecare măsură dezvoltarea istorică a acestei ştiinţe, Mecanica clasică se compune din următoarele trei părţi: STATICA, CINEMATICA şi DINAMICA.

STATICA se ocupă cu studiul forţelor ce acţionează asupra corpurilor, determinând sistemul de forţe echivalent şi de asemenea, se ocupă de sistemele de forţe care îşi fac echilibrul.

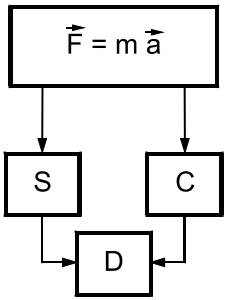


Fig.1.1

CINEMATICA se ocupă cu studiul mişcări corpurilor fără a ţine seama de forţele ce acţionează asupra lor şi masele corpurilor. Se face un studiu geometric al mişcării, introducând pe lângă coordonatele spaţiului (x, y, z) a patra coordonată timpul t.

DINAMICA (fig. 1.1). este esenţa mecanicii. Ea studiază mişcarea corpurilor sub influenţa forţelor ce acţionează asupra lor, ţinând seama de masele acestora. Dinamica face legătura între forţe şi mişcare, prin intermediul ecuaţiei fundamentale.

1.2. MODELE SIMPLIFICATOARE UTILIZATE ÎN MECANICĂ

Corpurile materiale, macroscopice, au o mare diversitate de proprietăți fizice şi forme geometrice. Nu toate aceste însuşiri influențează mişcarea corpurilor. Pentru simplificarea studiului şi aplicarea aparatului matematic, corpurile reale se transformă în modele, care reţin numai caracteristricile esențiale ale lor. Aceste modele sunt: punctul material, sistemul de puncte materiale, continuul material, corpul solid rigid şi sistemul de rigide.

Punctul material este cel mai simplu model; este un punct geometric căruia i se atribuie masă. Punctul material poate fi considerat orice corp solid ale cărui dimensiuni, deformații, mişcări de rotație sunt neesențiale în raport cu alte elemente. Acest model reduce întregul corp la un singur punct, centrul de masă al corpului, în care se consideră concentrată întreaga masă a acestuia.

Sistemul de puncte materiale este o mulțime finită de puncte materiale aflate în interacțiune mecanică.

Continuul material este modelul general al Mecanicii clasice, care consideră că întreg domeniul ocupat de un corp este umplut cu substanță. Un element oricât de mic din acest continuu conține materie.

Corpul solid rigid (rigidul) este modelul fundamental al Mecanicii clasice. Rigidul este un continuu material nedeformabil, adică distanța dintre două puncte rămâne aceeaşi indiferent de natura şi mărimea forțelor ce acționează asupra lui.

Sistemul de rigide este o mulțime finită de corpuri solide nedeformabile aflate în interacțiune mecanică. Orice maşină sau mecanism pot fi considerate ca sistem de corpuri rigide.

1.3. NOȚIUNI ŞI PRINCIPII FUNDAMENTALE

Ca orice ştiință, Mecanica clasică are la bază noțiuni şi principii fundamentale stabilite pe baza unei îndelungate experiențe - verificate prin măsurători sau prin lucrările care le executăm pe baza lor - dar care

nu pot fi reduse la alte noţiuni şi principii mai simple.

Noţiunile fundamentale ale Mecanicii clasice sunt: spaţiul, timpul şi masa.

Spaţiul este o entitate abstractă care reflectă forma obiectivă de existenţă a materiei, care caracterizează dimensiunile corpurilor şi poziţia lor relativă. Mecanica clasică adoptă modelul spaţiului euclidian tridimensional conceput ca fiind omogen, continuu şi izotrop.

Timpul este tot o entitate abstractă a Mecanicii, reflectând obiectiv existenţa materiei, care caracterizează durata, succesiunea sau simultaneitatea fenomenelor. În Mecanica clasică timpul se consideră infinit, continuu, omogen şi ireversibil, având un singur sens de curgere.

Spaţiul şi timpul sunt forme obiective de existenţă a materiei; ele sunt infinite şi veşnice ca şi materia.

Masa, cea de-a treia noţiune fundamentală, este considerată o mărime fizică scalară, care reflectă proprietăţile de inerţie şi gravitaţie ale materiei. În Mecanica clasică masa este considerată constantă, spre deosebire de Mecanica relativistă în care masa este funcţie de viteză.

Principiile fundamentale ale Mecanicii au fost formulate de ISAAC NEWTON în anul 1686 în lucrarea "Principiile matematice ale filozofiei naturale". Deşi au trecut 300 de ani aceste principii sunt adevăruri care nu pot fi dovedite riguros pe cale teoretică sau experimentală, dar pe baza cărora se poate construi o teorie care să fie în concordanţă cu experienţele şi datele obţinute prin observarea naturii. Aceste principii sunt următoarele: principiul inerţiei, principiul acţiunii forţei, principiul acţiunii şi reacţiunii.

Principiul inerţiei: " Un punct material îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atât timp cât asupra lui nu intervine vreo forţă care să-i modifice această stare".

Acest principiu conţine noţiunea abstractă de forţă şi ideea că drept cauză a modificării mişcării corpurilor este forţa. S-a observat că pot exista mişcări şi fără intervenţia forţelor, de exemplu, mişcările rectilinii şi uniforme. Deci, forţa nu este cauza mişcării, ci este cauza modificării mişcării.

Principiul acţiunii forţei: "Variaţia mişcării (acceleraţia) este proporţională cu forţa motrice aplicată şi este îndreptată după linia dreaptă de-a lungul căreia acţionează forţa".

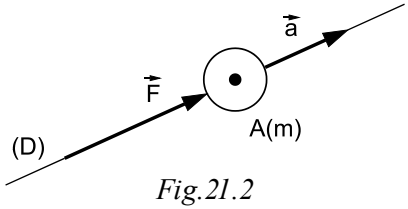


Fig.21.2

Acest principiu stabileşte o relaţie de legătură între forţa $\vec{F}$ şi acceleraţia $\vec{a}$ a unui punct material (fig. 1.2). NEWTON a introdus în acest principiu noţiunea de masă ca factor de proporţionalitate dintre forţă şi acceleraţie, pe care acesta o imprimă punctului material. Expresia matematică a acestui principiu este:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ sau } \vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1.1)$$

şi poartă numele de ecuaţia fundamentală a dinamicii.

Dacă $\vec{F} = 0$, rezultă $\vec{a} = 0$, ceea ce confirmă principiul inerţiei şi dovedeşte că cele două principii nu sunt contradictorii.

Acestui principiu NEWTON i-a adăugat şi un corolar cunoscut sub numele de **principiul paralelogramului forţelor**: "Dacă asupra unui punct material acţionează simultan două forţe cu suporturi diferite, efectul produs este acelaşi ca şi cum asupra sa ar acţiona o singură forţă având modulul, direcţia şi sensul diagonalei paralelogramului, cu cele două forţe ca laturi ".

Principiul acţiunii şi reacţiunii: " La orice acţiune îi corespunde întotdeauna o reacţiune egală şi de sens contrar; sau acţiunile reciproce a două corpuri sunt totdeauna egale şi îndreptate în sens contrar ".

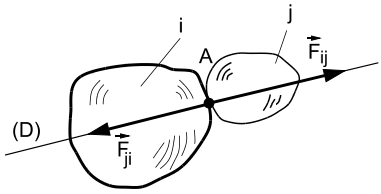


Fig1.3

Acest principiu se exprimă prin relaţia:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \qquad (1.2)$$

Principiul se explică atât în cazul contactului direct între corpuri (fig.1.3), cât şi în cazul acţiunii de la distanţă prin intermediul unui câmp (atracţia universală, forţe magnetice, etc.).

STATICA

2.

REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE APLICATE UNUI RIGID

2.1. Forța ca vector alunecător 19
2.2. Momentul polar al forței 21
2.3. Momentul axial al forței 23
2.4. Torsorul de reducere al unui sistem de forțe într-un pol 24
2.5. Cuplu de forțe 26

2.6. Variația elementelor torsorului față de schimbarea polului de reducere 27
2.7. Invarianții unui sistem de forțe față de schimbarea polului de reducere 29
2.8. Axa centrală a unui sistem de forțe oarecare 31
2.9. Teorema lui Varignon 32
2.10. Reducerea sistemelor particulare de forțe 32
2.10.1. Reducerea sistemelor de forțe concurente 33
2.10.2. Reducerea sistemelor de forțe coplanare 34
2.10.3. Reducerea sistemelor de forțe paralele 35
2.10.4. Reducerea forțelor distribuite 37
2.11. Probleme rezolvate 39
2.12. Probleme propuse 49

STATICA

2

REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE APLICATE UNUI RIGID

2.1. FORȚA CA VECTOR ALUNECĂTOR

Forța este o mărime vectorială ce măsoară interacțiunea dintre corpurile materiale. Ea careacerizează direcția, sensul şi intensitatea acestei interacțiuni. Datorită interacțiunii corpurilor materiale se produce o transmitere de mişcare de la un corp material la altul.

Forța poate avea caracter de vector legat sau vector alunecător. O forță aplicată unui punct material sau asupra unui corp deformabil are caracter de **vector legat**, pe când o forță aplicată asupra unui corp rigid are caracter de **vector alunecător**.

În Mecanica newtoniană corpurile se consideră rigide, deci nu se ține seama de deformarea corpurilor, decât în acele cazuri în care ipoteza corpului rigid nu duce la rezultate satisfăcătoare. Făcând această ipoteză, forțele se pot considera vectori alunecători. Efectul mecanic al forței este acelaşi indiferent de poziția punctului de aplicație pe dreapta suport.

Forțele diferă între ele după efectul lor. În funcție de acest efect ele pot fi comparate. Cea mai simplă metodă pentru efectuarea acestei comparații este **metoda dinamometrului**. Această metodă de măsurare a forțelor are la bază efectul de comprimare sau întindere a unui resort, la care deformațiile sunt proporționale cu solicitările. Două forțe care produc aceleaşi deformații sunt egale între ele. Dinamometrul este prevăzut cu o scală gradată pe care se poate citi mărimea forței.

Unitatea de măsură pentru forță în Sistemul Internațional este Newtonul. Un Newton reprezintă forța care, acționând asupra unei mase de 1 kg îi imprimă o accelerație de 1 m/s^2.

Cunoscând mărimea forței $\vec{F}$ și coordonatele a două puncte $A_1(x_1,y_1,z_1)$ și $A_2(x_2,y_2,z_2)$ situate pe suportul fortei $\vec{F}$ de versor $\vec{e}$, se poate determina expresia analitică a forței într-un sistem cartezian de referință (fig.2.1), utilizând relațiile cunoscute din algebra vectorială:

$$\vec{F} = F\cdot\vec{e} = F\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|} = F\frac{\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} = \\ = X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}. \tag{2.1}$$

unde: $$\Delta x = x_2 - x_1; \Delta y = y_2 - y_1; \Delta z = z_2 - z_1, \tag{2.2}$$

iar: $$X = F\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} = F\cdot\cos\alpha;$$

$$Y = F\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} = F\cdot\cos\beta; \tag{2.3}$$

$$Z = F\frac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} = F\cdot\cos\gamma;$$

X, Y, Z reprezentând componentele scalare ale forței $\vec{F}$.

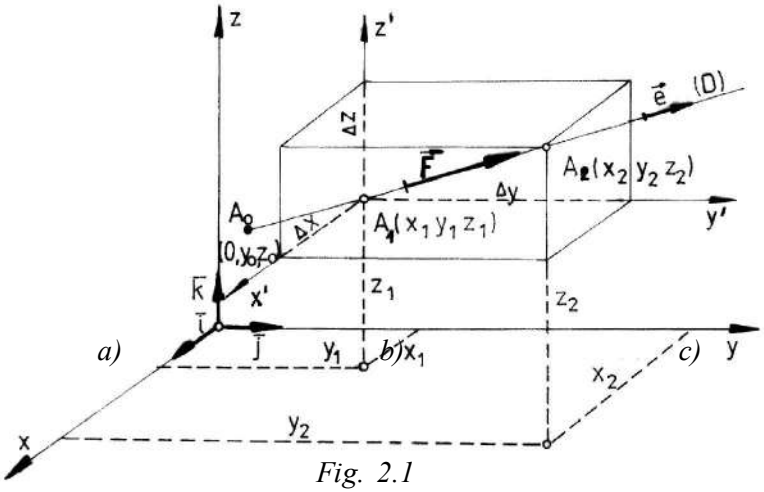


Fig. 2.1

2.2. MOMENTUL POLAR AL FORȚEI

La noțiunea de moment s-a ajuns din necesitatea practică de a evalua efectul de rotație pe care o forță îl produce acționând asupra unui corp. În figura 2.2 se consideră un corp solid rigid asupra căruia acționează o forță $\vec{F}$ cu punctul de aplicație în A şi suportul (D).

Prin definiție, momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un punct O, este produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al punctului de aplicație A al forței şi vectorul forță:

$$\vec{M}_{O(\vec{F})} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.4)$$

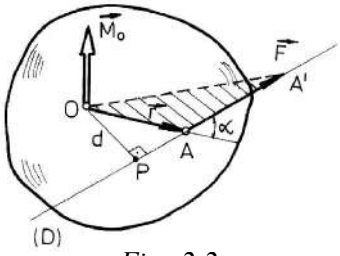


Fig. 2.2

Din această definiție rezultă că momentul $\vec{M}_O$ este un vector legat de punctul O, perpendicular pe planul definit de cei doi vectori, având sensul dat de regula şurubului drept, iar mărimea egală cu produsul dintre brațul forței, d şi forța F, astfel:

$$\left|\vec{M}_O\right| = \left|\overrightarrow{OA} \times \vec{F}\right| = OA \cdot F \sin\alpha = d \cdot F. \quad (2.5)$$

unde d = OA. sinα, este brațul forței $\vec{F}$, reprezentând distanța de la polul O la suportul (D) al forței.

Pentru a afla sensul vectorului moment cu regula şurubului drept, se aşează şurubul drept cu axa perpendiculară pe planul definit de cei doi vectori, $\vec{r}$ şi $\vec{F}$ şi se roteşte în sensul indicat de forță; sensul de înaintare al şurubului ne dă sensul vectorului moment.

Proprietăți ale momentului polar:

1) Momentul polar este nul când punctul în raport cu care se calculează momentul, se află pe suportul forței, adică cei doi vectori din produsul vectorial sunt coliniari.

2) Momentul polar nu depinde de caracterul de vector alunecător al forței. Într-adevăr, presupunând forța deplasată pe suportul ei din punctul A în punctul B (fig. 2.3), momentul ei în raport cu polul O va fi:

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}) = \overrightarrow{OB} \times \vec{F} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) \times \vec{F} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

unde $\overrightarrow{AB} \times \vec{F} = 0$, deoarece cei doi vectori sunt coliniari.

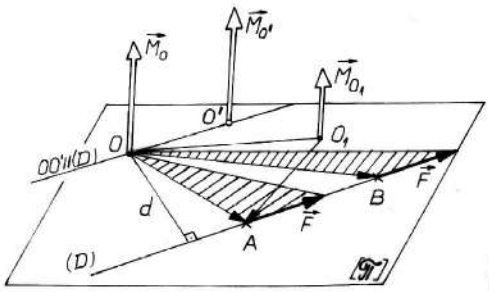


Fig. 2.3

3) Momentul polar se modifică atunci când se schimbă punctul în raport cu care se calculează după relația:

$$\vec{M}_{01} = \vec{M}_0 + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F} \quad (2.6)$$

Expresia analitică a momentului polar

Dacă în polul O față de care se calculează momentul forței $\vec{F}$ se consideră un sistem de referință cartezian drept (fig. 2.4), expresiile analitice ale vectorilor $\vec{r}, \vec{F}$ şi $\vec{M}_0$ sunt:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad (2.7)$$

iar
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k} \quad (2.8)$$

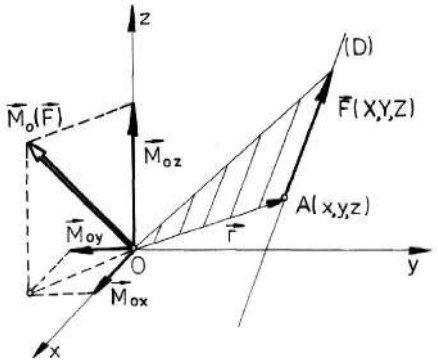


Fig. 2.4

Componentele scalare ale vectorului moment sunt:

$$\begin{aligned} M_{ox} &= yZ - zY, \\ M_{oy} &= zX - xZ, \\ M_{oz} &= xY - yX. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mărimea momentului este:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}. \quad (2.10)$$

Dacă forța $\vec{F}$ este situată în planul xOy, vectorul moment este dirijat după axa Oz.

2.3. MOMENTUL AXIAL AL FORȚEI

Prin definiție, momentul unei forțe în raport cu o axă, este proiecția pe acea axă a momentului forței calculat în raport cu un pol arbitrar ales pe axă.

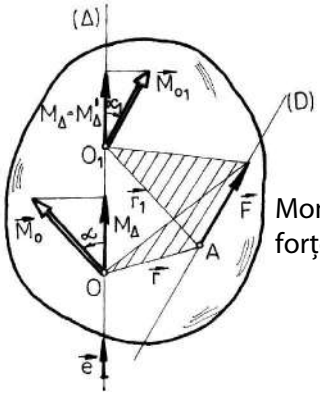


Fig. 2.5

În figura 2.5 se consideră o forță $\vec{F}$ având suportul (D) şi o axă (Δ) de versor $\vec{e}$, în raport cu care ne propunem să calculăm momentul axial M_Δ. Acest mo-

Momentul polar al forței

:ă a efectului de rotire a
ul axei (Δ). Conform

$$= \vec{M}_0 \cdot \vec{e} = \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e}, \tag{2.11}$$

ă unghiul dintre vectorul
) şi axa (Δ). Rezultă că

momentul axial se exprimă prin produsul mixt al vectorilor $\vec{r}, \vec{F}, \vec{e}$ şi este un scalar, semnul scalarului depinzând de unghiul α. Mărimea momentului axial este egală cu volumul paralelipipedului având ca muchii cei trei vectori.

Momentul axial poate fi scris şi ca vector:

$$\vec{M}_\Delta = M_\Delta \cdot \vec{e}, \text{ unde } M_\Delta = \text{pr.}M_{0(\Delta)}. \tag{2.12}$$

Proprietățile momentului axial

1) Momentul axial este invariant față de schimbarea polului pe axa față de care se calculează momentul. Demonstrarea acestei proprietăți se face considerând un alt pol O_1 situat pe aceiaşi axă (Δ). (fig. 2.5). Față de acest pol avem:

$$M'_\Delta = \vec{M}_{01} \cdot \vec{e} = \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e} = \left[\left(\overrightarrow{O_1O} + \vec{r}\right) \times \vec{F}\right] \cdot \vec{e} = \left(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e} + \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e},$$

unde s-a înlocuit $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}$ iar $(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}) \cdot \vec{e} = 0$ deci:

$$M'_\Delta = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{e} = M_\Delta. \qquad (2.13.)$$

2) Momentul axial este invariant față de schimbarea poziției forței pe suportul ei. Acest lucru s-a demonstrat, deoarece momentul polar al forței nu depinde de caracterul de vector alunecător al forței.

3) Momentul axial este nul când forța $\vec{F}$ şi axa (D) sunt coplanare (adică în cazul când intersectează axa sau în cazul când este paralelă cu axa).

4) Momentul unei forțe în raport cu o axă este egal cu suma momentelor componentelor forței, calculate în raport cu aceeaşi axă, dacă forțele componente au acelaşi punct de aplicație.

Expresia analitică a momentului axial. Cunoscând expresiile analitice ale vectorilor $\vec{r}, \vec{F}$ şi $\vec{e}$ care intră în produsul mixt (2.11), rezultă:

$$M_\Delta = \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = x(\gamma Y - \beta Z) - y(\gamma X - \alpha Z) + z(\beta X - \alpha Y). \qquad (2.14)$$

în care x, y, z reprezintă coordonatele punctului A de aplicație a forței; X, Y, Z reprezintă proiecțiile forței $\vec{F}$ pe axele sistemului de referință ales; α, β, γ reprezintă cosinuşii directori ai versorului $\vec{e}$ ce caracterizează direcția axei (Δ).

2.4. TORSORUL DE REDUCERE AL UNUI SISTEM DE FORȚE ÎNTR-UN POL

Se consideră în figura 2.6 un sistem de forțe $\vec{F}_i$, (i = 1,2,...,n) ce acționează asupra unui corp rigid în punctele A_i, având vectorii de poziție $\vec{r}_i$, față de punctul O.

Orice sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid este caracterizat prin două mărimi fundamentale:

a) *Forța rezultantă* a sistemului $\vec{R}$ este egală cu suma vectorială a forțelor componente:

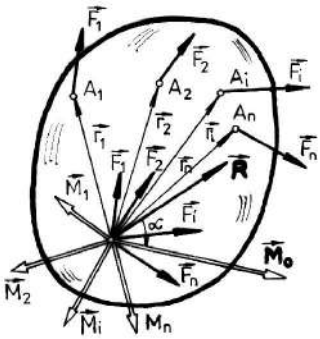


Fig. 2.6.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_1^n \vec{F}_i \quad (2.15.)$$

b) *Momentul rezultant* al sistemului $\vec{M}_0$, egal cu suma vectorială a momentelor forțelor date, calculate față de același pol O.

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (2.16)$$

Ansamblul celor doi vectori, cu punctul de localizare O, formează torsorul de reducere al sistemului de forțe în punctul O. Simbolic se notează astfel: $\tau_0(\vec{F}_i) = \tau_0(\vec{R}; \vec{M}_0)$

Torsorul de reducere este format din acele elemente mecanice echivalente, care aplicate în punctul O, produc același efect mecanic ca și sistemul de forțe dat.

Două sisteme de forțe sunt echivalente putând fi înlocuite unul prin altul, atunci când au același torsor într-un pol arbitrar ales. Când un sistem de forțe, redus într-un punct oarecare dă un torsor nul, adică $\vec{R} = 0$ și $\vec{M}_0 = 0$, sistemul de forțe este în echilibru.

Expresii analitice. Se presupune că sistemul de forțe este raportat la un sistem de referință triortogonal Oxyz având originea în punctul de reducere. Notăm cu X_i, Y_i, Z_i proiecțiile forței $\vec{F}_i$ pe axe, iar cu x_i, y_i, z_i coordonatele punctului A_i în care este aplicată forța $\vec{F}_i$, Avem deci:

$$\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k} \text{ și } \vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} \quad (2.17)$$

Forța rezultantă $\vec{R}$, egală cu suma vectorială a forțelor ce formează sistemul are expresia:

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = \sum_1^n \left(X_i \cdot \vec{i} + Y_i \cdot \vec{j} + Z_i \cdot \vec{k}\right) = \left(\sum_1^n X_i\right) \cdot \vec{i} + \left(\sum_1^n y_i\right) \cdot \vec{j} + \left(\sum_1^n z_i\right) \cdot \vec{k}; \quad (2.18)$$

deci $\vec{R} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k},$ unde proiecţiile X, Y, Z sunt:

$$X = \sum_{1}^{n} X_{i,}\ Y = \sum_{1}^{n} Y_i, Z = \sum_{1}^{n} Z_i, \tag{2.19}$$

Mărimea forţei rezultante este:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\sum X_i\right)^2 + \left(\sum Y_i\right)^2 + \left(\sum Z_i\right)^2}. \tag{2.20}$$

Relaţia (2.19) exprimă **teorema proiecţiilor**: proiecţiile forţei rezultante pe axele unui sistem cartezian de referinţă sunt egale cu suma proiecţiilor forţelor pe aceleaşi axe.

Momentul rezultant $\vec{M}_O$, egal cu suma vectorială a momentelor forţelor în raport cu polul O, are expresia:

$$\vec{M}_O = \sum_{1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} = M_{Ox} \cdot \vec{i} + M_{Oy} \cdot \vec{j} + M_{Oz} \cdot \vec{k}, \tag{2.21}$$

unde:

$$M_{Ox} = \sum_{1}^{n} \left(y_i Z_i - z_i Y_i\right), M_{Oy} = \sum_{1}^{n} \left(z_i X_i - x_i Z_i\right),$$

$$M_{Oz} = \sum_{1}^{n} \left(x_i Y_i - y_i X_i\right).$$

Mărimea momentului este:

$$\left|\vec{M}_O\right| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}. \tag{2.22}$$

2.5. CUPLU DE FORŢE

Cuplul de forţe este cel mai simplu sistem de forţe ce poate acţiona asupra unui corp rigid, fiind format din două forţe paralele, egale în modul şi de sensuri opuse.

Pentru a determina elementele caracteristice ale unui cuplu de forțe, în figura 2.7. s-a reprezentat un asemenea sistem.

Deci:

$$\vec{R} = \vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = 0, \tag{2.23}$$

iar:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} + \overrightarrow{OB} \times \left(-\vec{F}\right) =$$
$$= \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \times \vec{F} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \vec{M} \tag{2.24}$$

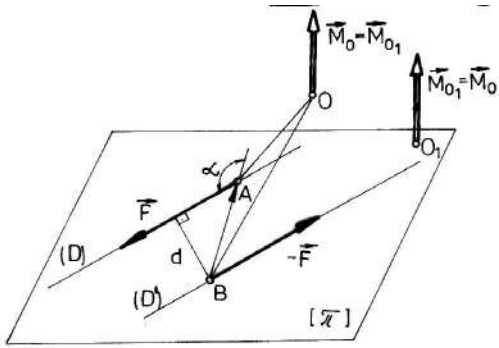


Fig. 2.7.

Din relațiile (2.23) şi (2.24) rezultă că forța rezultantă a unui cuplu este nulă iar momentul rezultant, numit *momentul cuplului* nu depinde de punctul față de care s-a calculat. Prin urmare, momentul unui cuplu este un vector liber, care se obține calculând momentul uneia din forțe în raport cu punctul de aplicație al celeilalte forțe. Momentul cuplului este un vector perpendicular pe planul cuplului [π], sensul se determină cu regula şurubului drept iar mărimea este:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\overrightarrow{BA} \times \vec{F}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\alpha = d \cdot F \tag{2.25}$$

unde d - este brațul cuplului, distanța dintre suporții paraleli ai forțelor.

2.6. VARIAȚIA ELEMENTELOR TORSORULUI FAȚĂ DE SCHIMBAREA POLULULUI DE REDUCERE

În figura 2.8. se consideră un corp rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe $\vec{F}_i$ (i=1,2,...,n) în punctele A_i având vectorii de poziție $\vec{r}_i$

față de polul O şi $\vec{r}_{1i}$ față de polul O_1.

Presupunând cunoscute elementele torsorului de reducere în polul O, $\tau_O\left(\vec{R},\vec{M}_{O1}\right)$ ne propunem să determinăm elementele torsorului într-un alt pol O_1, arbitrar ales $\tau_{O_1}\left(\vec{R},\vec{M}_{O_1}\right)$. Expresiile acestora vor fi:

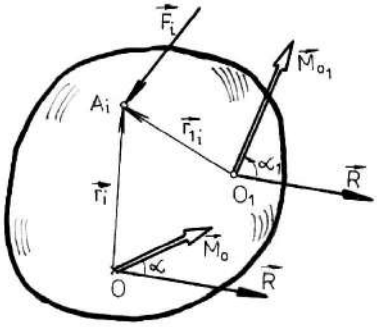


Fig. 2.8.

$$\tau_{O(\vec{F}_i)}=\begin{cases}\vec{R}=\sum\limits_{1}^{n}\vec{F}_{i;}\\ \vec{M}_O=\sum\limits_{1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_{i;}\end{cases}\quad \text{şi}$$

$$\tau_{O_1(\vec{F}_i)}=\begin{cases}\vec{R}=\sum\limits_{1}^{n}\vec{F}_{i;}\\ \vec{M}_{O_1}=\sum\limits_{1}^{n}\vec{r}_{1i}\times\vec{F}_{i;}\end{cases} \qquad (2.26)$$

Analizând expresiile (2.26), se constată că forța rezultantă $\vec{R}$, definită ca suma vectorială a tuturor forțelor sistemului, este independentă de alegerea polului de reducere. Deci, forța rezultantă este un **invariant vectorial** al sistemului de forțe, față de schimbarea polului.

Prin trecerea de la un pol la altul se observă că momentul rezultant al sistemului de forțe se modifică. Pentru a stabili legătura între cele două momente rezultante, se scrie relația între vectorii de poziție: $\vec{r}_{1i}=\vec{r}_i+\overrightarrow{O_1O}$. Înlocuind această relație în expresia momentului $\vec{M}_{01}$ rezultă:

$$\vec{M}_{O_1}=\sum_{1}^{n}\left(\vec{r}_i+\overrightarrow{O_1O}\right)\times\vec{F}_i=\sum_{1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum_{1}^{n}\overrightarrow{O_1O}\times\vec{F}_i=\sum_{1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\overrightarrow{O_1O}\times\left(\sum_{1}^{n}\vec{F}_i\right),$$

ştiind că:

$\sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O$ şi $\sum_1^n \vec{F}_i = \vec{R}$, rezultă:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_0 + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{R} \qquad (2.27)$$

Relația (2.27) cunoscută sub denumirea de **teorema momentelor** sau ecuația fundamentală a teoriei torsorului, determină variația momentului rezultant cu schimbarea polului.

Proprietățile torsorului, rezultă din analiza teoremei momentelor,

a) Dacă elementele torsorului sunt nule într-un punct, ele vor fi nule în orice alt punct.

Dacă $\tau_0(0,0)$ atunci $\tau_{0_1}(0,0)$

b) Dacă forța rezultantă $\vec{R}$, este nulă atunci momentul rezultant al sistemului de forțe este acelaşi în orice punct. Se spune că vectorul moment rezultant este un vector liber. Dacă $\tau_0(0,\vec{M}_O)$ atunci $\tau_{0_1}(0,\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O)$.

c) În punctele situate pe drepte paralele cu suportul forței rezultante $\vec{R}$, momentele rezultante ale sistemului de forțe sunt egale. Conform relației (2.27), dacă $\overrightarrow{O_1O} \| \vec{R}, \overrightarrow{O_1O} \times \vec{R} = 0$ iar $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O$.

d) Două sisteme de forțe care au acelaşi torsor într-un punct arbitrar ales, sunt **echivalente**, putând fi înlocuite unul prin altul.

2.7. INVARIANȚII UNUI SISTEM DE FORȚE FAȚĂ DE SCHIMBAREA POLULUI DE REDUCERE

Invarianții unui sistem de forțe sunt acele mărimi vectoriale sau scalare care, sunt independente de alegerea polului de reducere. Invarianții principali ai unui sistem de forțe sunt:

1. Forța rezultantă, $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, aşa cum s-a văzut în paragraful precedent, este independentă de alegerea polului de reducere, numită **invariantul vectorial** al sistemului de forțe.

2. Produsul scalar dintre forța rezultantă şi vectorul moment rezultant, este **invariantul scalar** al sistemului de forțe numit automoment:

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = \vec{R} \cdot \vec{M}_{O_1} = \text{const.}$$

Pentru a demonstra că acest produs scalar este invariant față de schimbarea polului, se înmulțește scalar cu $\vec{R}$ relația (2.27):

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{R} \cdot \vec{M}_O + \vec{R} \cdot \left(O_1O \times \vec{R}\right),$$

știind că: $\vec{R} \cdot \left(O_1O \times \vec{R}\right) = 0$, rezultă $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = \vec{R} \cdot \vec{M}_{O_1} = \text{const.}$

Invariantul scalar poate fi pus analitic sub forma:

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz}, \qquad (2.28)$$

numindu-se trinom invariant. Forța rezultantă și automomentul reprezintă invarianții principali ai unui sistem de forțe.

3. În afara acestor doi invarianți se pot introduce și alți invarianți care se pot exprima în funcție de invarianți principali. Astfel, făcând raportul celor doi invarianți principali se obține un nou invariant, numit **momentul minim**, notat cu M_{min} sau M_R:

$$M_R = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R} = \frac{A}{R} = \frac{\vec{R}}{R}\vec{M}_O = \vec{e}_R \cdot \vec{M}_O = pr_{(\vec{R})}\vec{M}_O \qquad (2.29)$$

unde $\vec{e}_R$ este versorul forței rezultante.

Rezultă că momentul minim reprezintă proiecția momentului rezultant pe o direcție paralelă cu forța rezultantă, ea fiind valoarea cea mai mică posibilă a momentului rezultant.

4. De asemenea, raportul $M_R / R = k$ numit **parametrul sistemului** este tot un invariant egal cu:

$$k = \frac{M_R}{R} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} = \frac{A}{R^2} = \frac{XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz}}{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (2.30)$$

Astfel se poate scrie: $\vec{M}_R = k\vec{R}$ (2.31)

Torsorul format din $\vec{R}$ și $\vec{M}_R$ se numește torsor minim și are expresia:

$$\tau_{R(\vec{F}_i)} = \begin{cases} \vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}; \\ \vec{M}_R = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2}\vec{R} = k \cdot \vec{R} = kX\vec{i} + kY\vec{i} + kZ\vec{k}; \end{cases} \qquad (2.32)$$

2.8. AXA CENTRALĂ A UNUI SISTEM DE FORȚE OARECARE

Axa centrală se defineşte, ca fiind locul geometric al punctelor, în care făcând reducerea sistemului de forțe, se obține torsorul minim.

$$\tau_{min} = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{1}^{n} \vec{F}_i = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \\ \vec{M}_R = k\vec{R} = kX\vec{i} + kY\vec{j} + kZ\vec{k} \end{cases} \qquad (2.32)$$

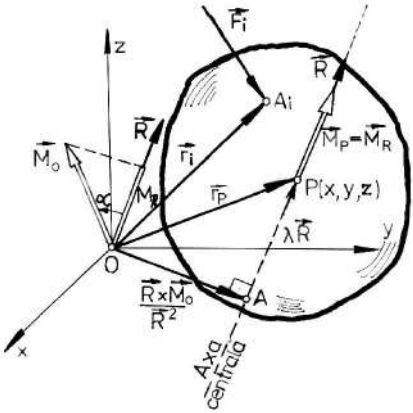


Fig.2.9.

În figura 2.9 se consideră un sistem de forțe $F_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$ care acționează asupra rigidului în punctul A_i de vectori de poziție $\vec{r}_i$ față de punctul O, originea sistemului de referință Oxyz.

Conform relației (2.27), momentul rezultant al sistemului de forțe într-un punct P(x, y, z) al axei centrale este:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \overrightarrow{OP} \times \vec{R} \qquad (2.33)$$

Înlocuind în (2.33) expresiile analitice ale vectorilor $\vec{M}_0$ şi $\vec{R}$ ce formează torsorul de reducere în polul O şi a momentului minim $\vec{M}_R = \vec{M}_P$ dat de relația (2.32), se determină *ecuațiile scalare* ale axei centrale:

Deci:

$$k\left(X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k}\right) = M_{Ox}\cdot\vec{i} + M_{Oy}\cdot\vec{j} + M_{Oz}\cdot\vec{k} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Prin identificarea coeficienților versorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rezultă:

$$\begin{aligned} kX &= M_{Ox} - (yZ - zY); \\ kY &= M_{Oy} - (zX - xZ); \\ kZ &= M_{Oz} - (xY - yX). \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Eliminând parametrul scalar k, rezultă ecuațiile carteziene ale axei centrale:

$$k = \frac{M_{Ox} - yZ + zY}{X} = \frac{M_{Oy} - zX + xZ}{Y} = \frac{M_{Ox} - xY - yX}{Z} \tag{2.35}$$

Din cele trei rapoarte egale, luând două câte două, obținem ecuațiile a două plane intersectate după axa centrală:

$$\begin{aligned} (\pi_1) &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (\pi_2) &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

2.9. TEOREMA LUI VARIGNON

Pentru un anumit sistem de forțe momentul minim $\vec{M}_R$ este nul. Aceste sisteme de forțe se reduc după axa centrală la o forță unică egală cu rezultanta sistemului. Pentru aceste sisteme de forțe, relația (2.33) devine:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \overrightarrow{OP} \times \vec{R} = 0 \text{ sau } \vec{M}_0 = \overrightarrow{OP} \times \vec{R} \tag{2.37}$$

Relația (2.37) exprimăteorema lui Varignon. Ea se enunță astfel:

"Momentul rezultant este egal cu momentul rezultantei, pentru sistemele de forțe la care momentul minim este nul."

Sistemele de forțe care îndeplinesc această condiție, sunt sistemele de forțe concurente, sistemele de forțe paralele şi sistemele de forțe coplanare, numite şi sisteme particulare de forțe.

2.10. REDUCEREA SISTEMELOR PARTICULARE DE FORȚE

Sistemele particulare de forțe sunt acele sisteme pentru care automomentul este nul. Automomentul fiind nul, înseamnă că unghiul dintre $\vec{R}$ şi $\vec{M}_O$ este 90° iar momentul minim este egal cu zero. După axa

centrală forțele se reduc la o forță unică. Sistemele de forțe concurente, sistemele de forțe coplanare şi sistemele de forțe paralele sunt considerate sisteme particulare de forțe.

2.10.1. Reducerea sistemelor de forțe concurente

Două sau mai multe forțe sunt concurente atunci când suporturile lor se întâlnesc într-un singur punct.

În figura 2.10 se consideră un sistem de forțe $\vec{F}_i$ (i = 1, 2,,.., n), concurente în punctul $A(x_A, y_A, z_A)$ într-un sistem de referință cartezian Oxyz.

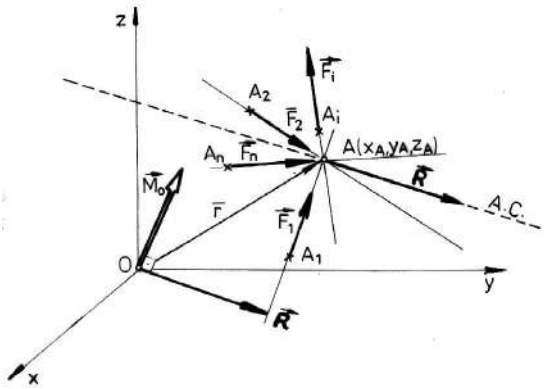


Fig. 2.10

Forțele $\vec{F}_i$, fiind vectori alunecători, prin glisare pe suporturile lor pot fi aduse cu punctele de aplicație A_i în punctul de concurentă A. Astfel, se poate considera acelaşi vector de poziție $\vec{r}_A$ pentru toate forțele sistemului. Torsorul de reducere în polul O, are expresia:

$$\tau_{R(\vec{F}_i)} = \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}; \\ \vec{M}_O = \sum \vec{r}_A \times \vec{F}_i = \vec{r}_A \times \left(\sum \vec{F}_i\right) = \vec{r}_A \times \vec{R} \end{cases} \qquad (2.38)$$

Dar $A = \vec{R}\vec{M}_O = \vec{R} \cdot \left(\vec{r}_A \times \vec{R}\right) = 0$, automomentul fiind nul unghiul dintre cei doi vectori $\vec{R}$ şi $\vec{M}_O$ este 90°. Deci, forțelor concurente li se aplică teorema lui Varignon.

Un sistem de forțe concurente se reduce într-un pol O, ce nu aparține axei centrale, la un torsor $\tau_O\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right)$, având componentele perpendiculare.

Dacă se alege drept pol de reducere punctul de concurență A,

momentul fiecărei forțe $\vec{F}_i$, fiind zero în raport cu A, şi momentul rezultantei este zero. Deci, punctul A aparține axei centrale, aceasta fiind paralelă cu suportul forței rezultante $\vec{R}$ ce trece prin O.

Un sistem de forțe concurente se reduce după axa centrală la o rezultantă unică,ce trece prin punctul de concurență. Axa centrală este definită de punctul de concurență $A(x_A, y_A, z_A)$ şi parametrii directori ai forței rezultante $\vec{R}(X, Y, Z)$. Ecuațiile carteziene ale axei centrale sunt:

$$\frac{x - x_A}{X} = \frac{y - y_A}{Y} = \frac{z - z_A}{Z} \qquad (2.39)$$

2.10.2. Reducerea sistemelor de forțe coplanare

Un sistem de forțe se numeşte coplanar, atunci când toate forțele sistemului au suporturile în acelaşi plan. În figura 2.11. se consideră un asemenea sistem de forțe, coplanare, situate în planul Oxy.

Dacă forțele $\vec{F}_i(X_i, Y_i, 0)$ ce formează sistemul sunt conținute în planul Oxy, înseamnă că şi forța rezultantă $\vec{R}(X, Y, 0)$ va fi conținută în acelaşi plan, având componente după axele Ox şi Oy. Momentul fiecărei forțe $\vec{F}_i$ în raport cu polul O fiind un vector perpendicular pe planul Oxy şi vectorul moment rezultant este perpendicular pe acelaşi plan, adică orientat după axa Oz.

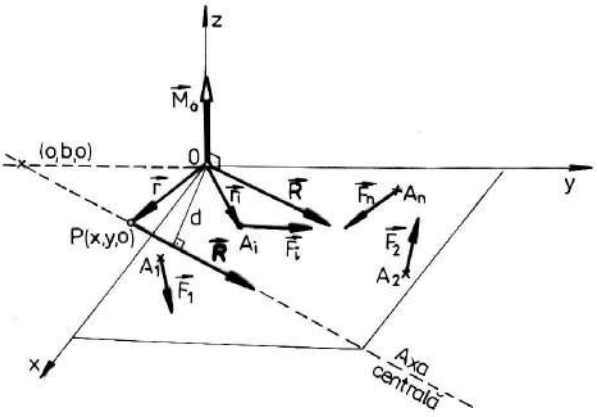


Fig. 2.11.

Cu aceste observații, elementele torsorului de reducere în polul O au expresiile:

$$\tau_{O(\vec{F}_i)} = \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i = X\vec{i} + Y\vec{j}; \\ \vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_{Oz}\vec{k}. \end{cases} \qquad (2.40)$$

Vectorul moment rezultant $\vec{M}_O$ fiind perpendicular pe planul forțelor, este perpendicular şi pe $\vec{R}$. Automomentul $A = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$, fiind nul, se poate aplica teorema lui Varignon. În punctele axei centrale, sistemul se reduce la o forță unică egală cu $\vec{R}$

Poziția rezultantei este dată de poziția axei centrale. Ecuația axei centrale, conținute în planul forțelor, se determină aplicând teorema lui Varignon. Considerând punctul P (fig. 2.11.) un punct al axei centrale, rezultă: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{R}$
sau:

$$M_{Oz}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}, \quad \text{de unde} \quad M_{Oz} = xY - yX, \qquad (2.41)$$

2.10.3. Reducerea sistemelor de forțe paralele

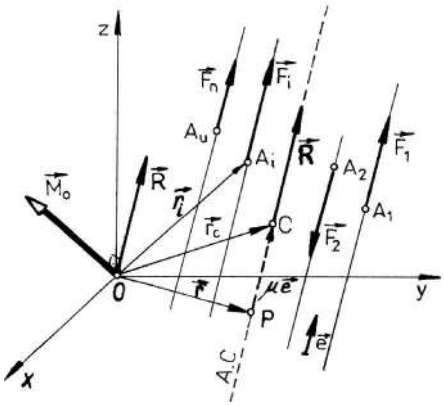


Fig.2.12.

Prin sistem de forțe paralele se înțelege un sistem de forțe la care suporturile tuturor forțelor sunt paralele cu o direcție dată, de versor $\vec{e}$. În figura 2.12. se consideră un sistem de forțe paralele $\vec{F}_i$ (i=1,2,..,n), cu punctele de plicație A_i şi vectorii de poziție $\vec{r}_i$ în sistemul de referință cartezian Oxyz. Forțele având aceiaşi direcție, fiecare forță a

sistemului poate fi scrisă sub forma: $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{e}$.

Reducând sistemul în polul O, elementele torsorului de reducere vor fi:

$$\tau_{O(\vec{F}_i)} = \begin{cases} \vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = \left(\sum_1^n F_i \right) \vec{e}; \\ \vec{M}_O = \sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_1^n \vec{r}_i \times F_i \cdot \vec{e} = \left(\sum_1^n \vec{r}_i \cdot F_i \right) \times \vec{e} \end{cases} \qquad (2.42)$$

Din expresia torsorului de reducere (2.42) rezultă că: forța rezultantă a sistemului şi axa centrală au aceiaşi direcție cu forța sistemului, iar momentul rezultant $\vec{M}_O$ este un vector perpendicular pe rezultantă, produsul lor scalar fiind nul.

După axa centrală sistemul se reduce la o forță unică egală cu rezultanta sistemului. Mărimea ei, fiind suma algebrică a mărimilor forțelor componente, $R = \sum_1^n F_i$

Axa centrală se determină aplicând teorema lui Varignon scrisă sub forma:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R}$$

unde $\vec{r}$ este un vector de poziție al unui punct P situat pe axa centrală. Înlocuind pe $\vec{M}_O$ şi $\vec{R}$ determinați anterior, rezultă:

$$\left(\sum \vec{r}_i F_i \right) \times \vec{e} = \vec{r} \times \left(\sum F_i \right) \vec{e}, \qquad \text{sau}$$

$$\left(\sum \vec{r}_i F_i \right) \times \vec{e} - \vec{r} \times \left(\sum F_i \right) \vec{e} = 0, \qquad \text{sau}$$

$$\left[\left(\sum \vec{r}_i F_i \right) - \vec{r} \left(\sum F_i \right) \right] \times \vec{e} = 0.$$

Vectorul din paranteză este coliniar cu vectorul $\vec{e}$ (produsul lor vectorial fiind nul), iar condiția de coliniaritate se poate scrie şi astfel:

$$\left(\sum \vec{r}_i F_i \right) - \vec{r} \left(\sum F_i \right) = \lambda \vec{e}, \qquad (2.43)$$

Din relația (2.43) în care λ este un parametru scalar, rezultă ecuația vectorială a axei centrale:

$$\vec{r} = \frac{\sum \vec{r}_i F_i}{\sum F_i} - \frac{\lambda}{\sum F_i}\vec{e} \tag{2.44}$$

Dacă se notează:

$$\mu = \frac{\lambda}{\sum F_i} \text{ şi } \vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i F_i}{\sum F_i} \tag{2.45}$$

ecuația vectorială a axei centrale a forțelor paralele capătă forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_c - \mu\vec{e}, \tag{2.46}$$

unde μ este un alt parametru scalar.

Analizând relația (2.46), observăm că axa centrală trece printr-un punct C dat de vectorul $\vec{r}_c$, a cărei poziție nu depinde de direția comună a forțelor. Acest punct se numeşte centrul forțelor paralele. Proiectând pe axele sistemului de referință Oxyz, vectorul $\vec{r}_c$ din relația (2.45) rezultă coordonatele acestui punct:

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}; y_c = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}, z_c = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}. \tag{2.47}$$

unde x_i, y_i, z_i reprezintă coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor $\vec{F}_i$.

Cunoscând coordonatele acestui punct C, axa centrală se poate trasa uşor ştiind că este paralelă cu forțele sistemului. În cazul când forțele sunt vectori legați, centrul forțelor paralele reprezintă punctul de aplicație al rezultantei sistemului pe axa centrală.

2.10.4. Reducerea forțelor distribuite

În toate raționamentele de până acum, s-a considerat că forțele ce acționează asupra corpurilor sunt concentrate în anumite puncte. În practică se întâlnesc sisteme de forțe distribuite de-a lungul unei linii, pe suprafață sau distribuite într-un volum.

Cu forțele distribuite se poate lucra ca şi cu cele concentrate, dacă acestea se consideră ca o mulțime de forțe elementare concentrate. Toate noțiunile şi relațiile stabilite pentru sistemele de forțe studiate până aici,

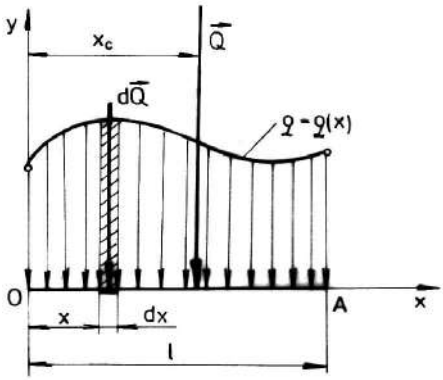


Fig. 2.13.

rămân valabile şi pentru sistemele de forţe distribuite.

În cele ce urmează se va analiza numai cazul forţelor coplanare şi paralele, distribuite liniar. Astfel, în figura 2.13. se consideră un asemenea sistem de forţe, distribuite liniar pe lungimea l după o lege oarecare q=q(x). Dacă se alege ca axă Ox dreapta pe care forţele sunt distribuite, pe fiecare element de lungime dx va acţiona o forţă elementară dQ = q dx,unde q se numeşte forţă unitară şi se măsoară în N/m.

Sistemul de forţe reprezentat se înlocuieşte cu un sistem de forţe elementare, paralele de intensitate variabilă.

Torsorul întregului sistem de forţe în polul O este:

$$Q = \int_0^l q(x)dx \text{ şi } M_O = \int x dQ = \int_0^l xq(x)dx \qquad (2.48)$$

Sistemul de forţe se reduce după axa centrală la o forţă unică egală cu rezultanta sistemului. Poziţia axei centrale se determină prin aplicarea teoremei lui Varignon:

$$x_c \cdot Q = M_O \text{ , sau } x_c \cdot Q = \int_0^l xq(x)dx, \qquad (2.49)$$

deci

$$x_c = \frac{\int_0^l x \cdot q(x)dx}{Q} = \frac{\int_0^l x \cdot q(x)dx}{\int_0^l q(x)dx}. \qquad (2.50)$$

unde x_c reprezintă abscisa care poziţionează rezultanta Q. Analizând relaţiile (2.48) şi (2.50) rezultă că rezultanta sistemului de forţe distribuite liniar este numeric egală cu aria suprafeţei de distribuţie, iar suportul rezultantei trece prin centrul de greutate al suprafeţei de distribuţie.

2.11 PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine rezultanta şi poziția rezultantei pentru următoarele sisteme de forțe distribuite liniar:

a) Forțe distribuite uniform (fig. 2.14):

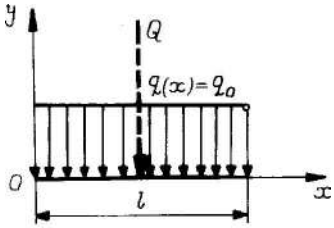


Fig. 2.14.

$$Q = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l q_O dx = q_O \cdot l;$$

$$x_c = \frac{\int_0^l xq(x)dx}{Q} = \frac{q_O \int_0^l xdx}{q_O l} = \frac{1}{2}.$$

b) Forțe distribuite liniar (fig. 2.15):

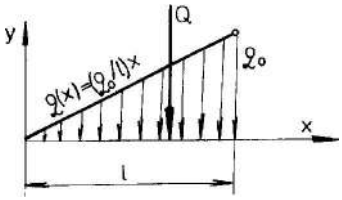


Fig. 2.15.

$$Q = \int_0^l \frac{q_O}{l} x dx = \frac{1}{2} q_O l;$$

$$x_c = \frac{\int_0^l x \frac{q_O}{l} x dx}{\frac{1}{2} q_O l} = \frac{2}{3} l.$$

2. Asupra unei prisme triunghiulare acționează o forță Q=30N; pe diagonala BE, orientată de la B spre E, ca în figura 2.16. ştiind că: OB=OD=4m; OA=2m; să se determine:

a) momentele forței $\vec{Q}$ în raport cu vârfurile prismei;

b) momentele forței $\vec{Q}$ în raport cu muchiile prismei.

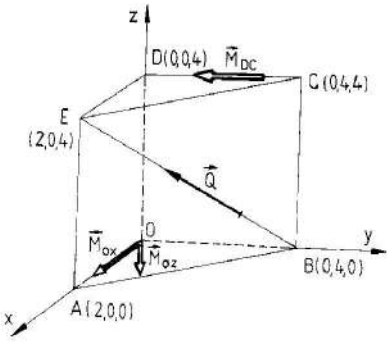


Fig. 2.16

Rezolvare:

a) Expresia analitică a forței $\vec{Q}$ în sistemul Oxyz este:

$$\vec{Q}=Q\cdot\vec{e}_{BE}=Q\frac{BE}{BE}=30\cdot\frac{2\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{2^2+4^2+2^2}}=10\vec{i}-20\vec{j}+20\vec{k}.$$

Momentul forței $\vec{Q}$ în raport cu vârfurile prismei sunt: $\vec{M}_E=\vec{M}_B=0,$ punctele fiind situate pe suportul forței:

$$\vec{M}_O=\overrightarrow{OB}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&4&0\\10&-20&20\end{vmatrix}=80\vec{i}-40\vec{k};(\text{Nm})$$

$$\vec{M}_A=\overrightarrow{AE}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&4\\10&-20&-20\end{vmatrix}=80\vec{i}+40\vec{j};(\text{Nm})$$

$$\vec{M}_C=\overrightarrow{CB}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&-4\\10&-20&20\end{vmatrix}=-80\vec{i}-40\vec{j};(\text{Nm})$$

$$\vec{M}_D=\overrightarrow{DE}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&0\\10&-20&20\end{vmatrix}=-40\vec{j}-40\vec{k};(\text{Nm})$$

b) Momentele axiale în raport cu muchiile prismei sunt:

$$M_{Ox}=M_{OA}=\vec{M}_0\cdot\vec{i}=80;M_{Oy}=M_{OB}=0;(\text{Nm})$$
$$M_{Oz}=M_{OD}=\vec{M}_0\cdot\vec{j}=-40;(\text{Nm})$$
$$M_{AB}=M_{AE}=M_{EC}=M_{EB}=0,$$

suportul forței intersectează muchiile respective;

$$M_{DC}=\vec{M}_D\cdot\vec{e}_{DC}=\vec{M}_D\cdot\vec{j}=-40(\text{Nm})$$

3. Un cuplu de forțe (F;-F) acționează asupra unei plăci circulare în două situații: placa este perpendiculară pe axa de rotație z-z, (fig. 2.17,a) şi în cazul al doilea placa formează unghiul $\alpha = 50^\circ$ cu axa de rotație (fig. 2.17,b).

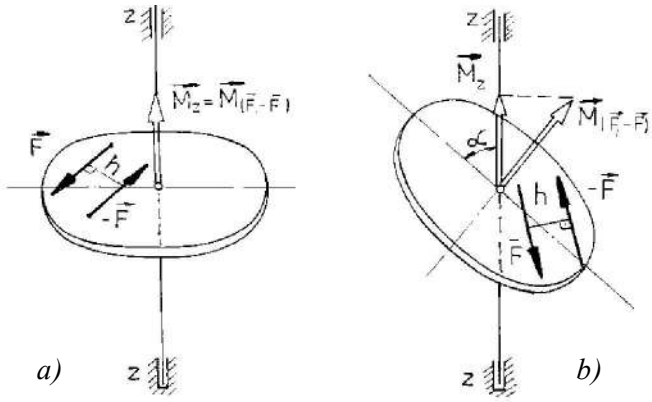


Fig. 2.17

Cunoscând brațul cuplului h = 0,2 m şi mărimile forțelor F = 80 N, să se determine momentul forțelor în raport cu axa de rotație z-z.

În primul caz, momen- tul în raport cu axa de rotație M_z este egal cu momentul cuplului, $M(\vec{F}, -\vec{F})$, placa fiind perpendiculară pe axa de rotație. Mărimea momentului este:

$$M_z = h \cdot F = 0{,}2 \cdot 80 = 16\text{Nm}$$

În al doilea caz, pentru a afla momentul în raport cu axa z-z de rotație se proiectează momentul cuplului $M(\vec{F},-\vec{F})$ pe axa de rotație. Momentul cuplului fiind perpendicular pe placă rezultă:

$$M_z = h \cdot F \cdot \cos 40^\circ = 16 \cdot 0{,}766 = 12{,}2\text{Nm}.$$

4. Un sistem de forțe şi cupluri acționează asupra unui paralelipiped de dimensiuni (2; 6; 3) m, ca în figura 2.18.

Cunoscând mărimile acestora: F_1=14N, $F_2 = 4\sqrt{10}$N , $F_3 = 2\sqrt{13}$N ,

F_4=4N, respectiv C_1=2N.m, C_2=3 Nm, se cere:

a) să se reducă sistemul în polul O;

b) torsorul sistemului în polul B;

c) invarianții vectoriali şi scalari ai sistemului;

d) torsorul minim;

e) ecuațiile carteziene ale axei cen- trale şi reprezentarea ei.

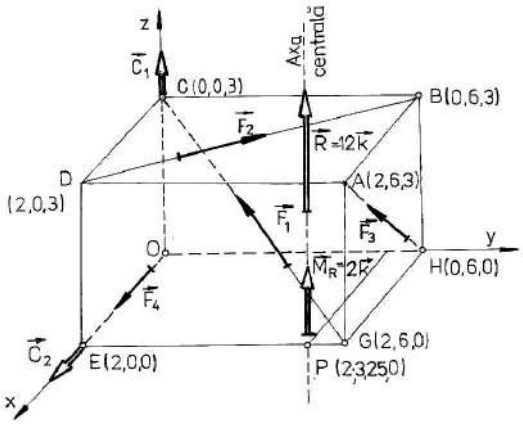


Fig. 2.18

Rezolvare.

a) Se determină expresiile analitice ale forțelor:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_{GC} = F_1 \frac{\overline{GC}}{\left|\overline{GC}\right|} = 14\frac{-2\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}} = -4\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k};$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \frac{\overline{DB}}{\left|\overline{DB}\right|} = 4\sqrt{10}\,\frac{2\vec{i}+6\vec{j}}{\sqrt{2^2+6^2}} = -4\vec{i}+12\vec{j}.$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \frac{\overline{HA}}{\left|\overline{HA}\right|} = 2\sqrt{13}\,\frac{2\vec{i}+3\vec{k}}{\sqrt{2^2+3^2}} = 4\vec{i}+6\vec{k}.$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \cdot \vec{i} = 4\vec{i}.$$

Forța rezultantă, $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 12\vec{k}$

Momentele forțelor în polul O, originea sistemului sunt:

$$\vec{M}_{O(\vec{F}_1)} = OG \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & 0 \\ -4 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 36\vec{i}-12\vec{j};$$

$$\vec{M}_{O(\vec{F}_2)} = \overrightarrow{OD} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -12 & 0 \end{vmatrix} = -36\vec{i} - 12\vec{j} + 24\vec{k};$$

$$\vec{M}_{O(\vec{F}_3)} = \overrightarrow{OH} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 36\vec{i} - 24\vec{k};$$

$\vec{M}_{O(\vec{F}_4)} = \overrightarrow{OE} \times \vec{F}_4 = 0$, iar $\vec{C}_1 = 2\vec{k}$ şi $\vec{C}_2 = 3\vec{i}$

Momentul rezultant al sistemului de forțe şi cupluri este:

$$\vec{M}_O = \sum_1^4 \vec{M}_{O_i} + \sum_1^2 \vec{C}_i = 39\vec{i} - 24\vec{j} + 2\vec{k}.$$

În polul O sistemul de forțe se reduce la un torsor $\tau_O\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right)$.

b) Torsorul sistemului în polul B este $\tau_B\left(\vec{R}, \vec{M}_B\right)$, unde:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_O + BO \times \vec{R} = 39\vec{i} - 24\vec{j} + 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -33\vec{i} - 24\vec{j} + 2\vec{k}.$$

c) Invarianții principali ai sistemului de forțe sunt:

$\vec{R} = 12\vec{k}$ şi $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 24$.

Invarianții secundari sunt:

$$M_R = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R} = \frac{24}{12}; k = \frac{M_R}{R} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}; \vec{M}_R = k\vec{R} = 2\vec{k}.$$

d) Torsorul minim $\tau_O\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right)$ unde:

$\vec{R} = 12\vec{k}(N)$ şi $\vec{M}_R = 2\vec{k}(Nm)$.

e) Cunoscând $\tau_O(R, M_O)$ se pot scrie ecuațiile carteziene, ştiind că:

$X = 0;\ Y = 0;\ Z = 12;\ M_{Ox} = 39;\ M_{Oy} = -24$ şi $M_{Oz} = 2$.

Deci: $\frac{32-12y+0}{0}=\frac{-24-0+12x}{0}=\frac{2-0+0}{12}$;

Sub forma intersecției a două plane, axa centrală are expresia:

$(\pi_1)12y-39=0;\ (\pi_2)12x-24=0.$

Axa centrală este o dreaptă paralelă cu axa Oz, şi înțeapă planul Oxyz în punctul P (2; 3,25; 0). Pe axa centrală (fig. 2.18) se reprezintă torsorul minimal $\tau_R(R,M_R)$ Sistemul de forțe şi cupluri se reduce după axa centrală la o dinamă.

5. Un stâlp având înălțimea 20 m este ancorat prin intermediul a trei cabluri fixate în punctele A, B şi C, a căror poziție este cunoscută şi indicată în figura 2.19.

Ştiind că în cablul VB efortul este 4,2 kN, să se determine eforturile din cablurile VA şi VC astfel încât rezultanta lor în vârful V să fie de-a lungul stâlpului. Care este mărimea acestei rezultante?

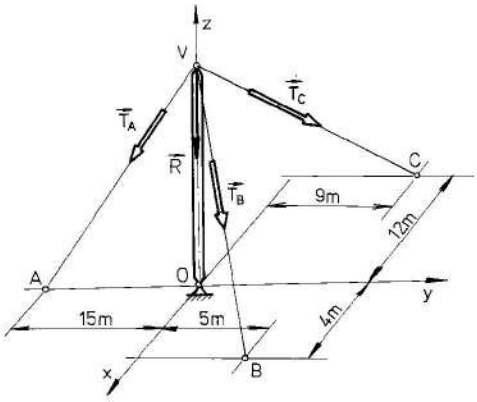


Fig. 2.19

Rezolvare. Expresiile analitice ale eforturilor sunt:

$$\vec{T}_A=T_A\frac{\overline{VA}}{|\overline{VA}|}=T_A\frac{-15\vec{j}-20\vec{k}}{\sqrt{15^2+20^2}}=-\frac{3}{5}T_A\vec{j}-\frac{4}{3}T_A\vec{k}\,(kN),$$

$$\vec{T}_B=T_B\frac{\overline{VB}}{|\overline{VB}|}=4{,}2\frac{4\vec{j}+5\vec{j}-20\vec{k}}{\sqrt{4^2+5^2+20^2}}=\frac{4}{5}\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\,(kN)$$

$$\vec{T}_C=T_C\frac{\overline{VC}}{|\overline{VC}|}=T_C\frac{-12\vec{i}+9\vec{j}-20\vec{k}}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}=-\frac{12}{25}T_C\vec{i}+\frac{9}{25}T_C\vec{j}-$$

$$-\frac{4}{5}T_C\vec{k}\,(kN).$$

Rezultanta sistemului este:

$$\vec{R}=\vec{T}_A+\vec{T}_B+\vec{T}_C=\left(\frac{4}{5}-\frac{12}{25}T_C\right)\vec{i}+\left(-\frac{3}{5}T_A+1+\frac{9}{25}T_C\right)\vec{j}+$$

$$+\left(-\frac{4}{3}T_A-4-\frac{4}{5}T_C\right)\vec{k}.$$

Punând condițiile X = Y = 0, adică rezultanta să aibă componentă numai după axa Z, rezultă:

$$20-12T_C=0;15T_A-9T_C=25,\text{unde } T_C=1,66\text{kN}^{\circ}\text{i}T_A=2,66\text{kN}.$$

Rezultanta:

$$\vec{R}=\left(-\frac{4}{3}T_A-4-\frac{4}{5}T_C\right)\vec{k}=-8,88\vec{k};\left|\vec{R}\right|=8,88\text{kN}.$$

6. Asupra unei plăci dreptunghiulare având dimensiunile (4;2) metri, acționează un sistem format din patru forțe coplanare, ca în figura 2.20. Cunoscând mărimile forțelor P_1=P_2=10N, $P_3=20\sqrt{2}$N și $P_4=10\sqrt{5}$N, se cere:

a) să se reducă sistemul în polul O;

b) să se reducă sistemul după axa centrală și să se reprezinte.

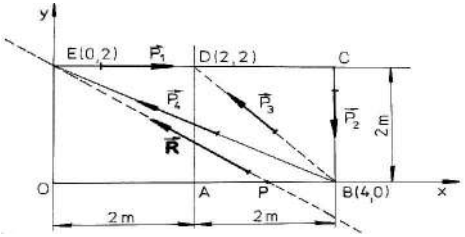


Fig. 2.20

Rezolvare:

a) Expresiile analitice ale forțelor sistemului sunt:

$$\vec{P}_1=10\vec{i};\vec{P}_2=-10\vec{i};$$

$$\vec{P}_3=P_3\frac{\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|}=20\sqrt{2}\frac{-2\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{2^2+2^2}}=-20\vec{i}+20\vec{j};$$

$$\vec{P}_4=P_4\frac{\overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}=10\sqrt{5}\frac{-4\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{4^2+2^2}}=-20\vec{i}+10\vec{j};$$

Forța rezultantă a sistemului:

$$\vec{R} = \sum_1^4 \vec{P}_i = -30\vec{i} + 20\vec{j}$$

Momentele forțelor în polul O, originea sistemului ales, sunt:

$$\vec{M}_{O(\vec{P}_1)} = -2 \cdot 10\vec{k} = -20k;\ \vec{M}_{O(\vec{P}_2)} = -4 \cdot 10\vec{k} = -40\vec{k};$$

$$\vec{M}_{O(\vec{P}_3)} = \overrightarrow{OB} \times \vec{P}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -20 & 20 & 0 \end{vmatrix} = 80\vec{k};$$

$$\vec{M}_{O(\vec{P}_4)} = \overrightarrow{OB} \times \vec{P}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 40\vec{k}.$$

Momentul rezultant este: $\vec{M}_O = \sum_1^4 \vec{M}_{Oi} = 60\vec{k}$, Sistemul se reduce în polul O la un torsor $\tau_O(\vec{R}, \vec{M}_O)$.

b) Torsorul minim este $\tau_R(\vec{R}, \vec{M}_R)$, unde $\vec{M}_R = 0$ deoarece $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$. După axa centrală sistemul se reduce la o forță unică egală cu rezultanta sistemului. Ecuația axei centrale, dată de relația (2.52) în care $M_{Oz} = 60$, X = -30, Y = 20, este: 60 =20x + 30y. Axa centrală trece prin punctele P (3; 0) şi E (0; 2).

7. Asupra unui cub de muchie egală cu 4 m (v. fig. 2.21) acționează un sistem de de forțe paralele. Cunoscând coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor şi mărimile acestora $F_1 = 60N$, $F_2 = 10N$, $F_3 = 50N$, $F_4 = 100N$, $F_5 = 60N$, să se reducă sistemul după axa

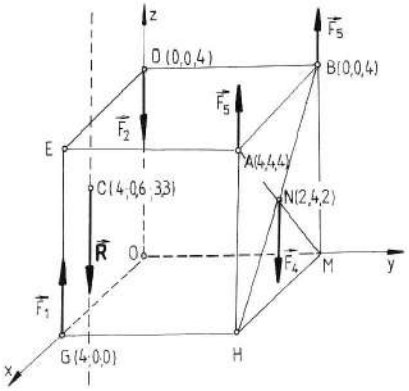


Fig. 2.21

centrală şi să se afle coordonatele centrului forţelor paralele.

Rezolvare. Pentru determinarea centrului forţelor paralele şi aplicarea relaţiilor (2.47) se va face un calcul tabelar. În acest scop se întocmeşte tabelul 2.1. în care se trec coordonatele punctelor de aplicaţie (x_i, y_i, z_i) şi mărimile forţelor F_i. Însumând pe coloane, rezultă numitorii şi numărătorii fracţiilor din relaţiile (2.47).

Tabelul 2.1

Nr. crt.	x_i	y_i	z_i	F_i	x_iF	y_iF	z_iF
1	4	0	0	60	24	0	0
2	0	0	4	-10	0	0	-40
3	4	4	4	50	200	200	200
4	2	4	2	-100	-200	-400	-200
5	0	4	4	+60	0	240	240
	$\sum$			60	240	-360	200

Astfel:

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{240}{60} = 4\text{m};$$

$$z_C = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i} = \frac{200}{60} = 3{,}3\text{m}.$$

Axa centrală este paralelă cu forţele sistemului şi trece prin C (4;-6;3,3)m.

8. Să se determine rezultanta şi poziţia rezultantei pentru următoarele sisteme de forţe distribuite liniar:

a) Forţe distribuite uniform (fig. 2.22):

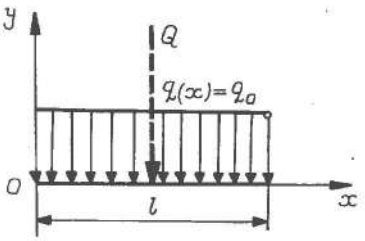


Fig. 2.22

$$Q = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l q_O dx = q_O \cdot l$$

$$x_c = \frac{\int_0^l xq(x)dx}{Q} = \frac{q_O \int_0^l xdx}{q_O l} = \frac{1}{2}.$$

b) Forțe distribuite liniar (fig. 2.23):

$$Q = \int_0^l \frac{q_O}{l} x dx = \frac{1}{2} q_O l;$$

$$x_c = \frac{\int_0^l x \frac{q_O}{l} x dx}{\frac{1}{2} q_O l} = \frac{2}{3} l.$$

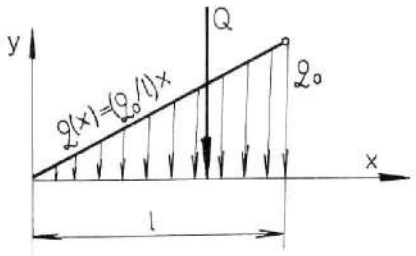


Fig. 2.23

c) Forțe distribuite parabolic, de forma $q^2 = ax$ (fig. 2.24):

$$Q = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l \frac{q_O}{\sqrt{l}} \sqrt{x} dx =$$

$$= \frac{2}{3} q_O l;$$

$$x_c = \frac{\int_0^l x \frac{q_O}{\sqrt{l}} \sqrt{x} dx}{\frac{2}{3} q_O l} = \frac{3}{5} l.$$

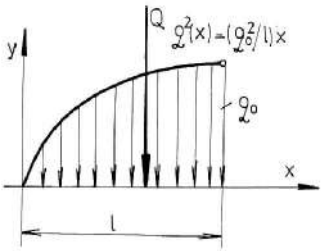


Fig. 2.24

d) Forțe distribuite parabolic, de forma $q = b \cdot x^2$ (fig. 2.25):

$$Q = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l \frac{q_O}{l^2} x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3} q_O l;$$

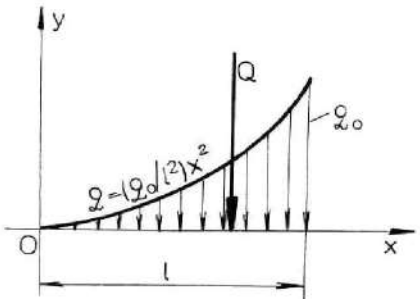


Fig. 2.25

$$x_c = \frac{\int_0^l x \frac{q_O}{l^2} x^2 dx}{\frac{1}{3} q_O l} = \frac{3}{4} l.$$

e) Forțe distribuite uniform pe un arc de cerc (fig. 2.26):

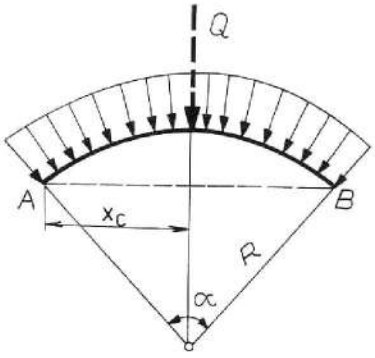


Fig. 2.26

$$Q = q_O \cdot AB = 2q_O \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

(componentele orizontale se anulează reciproc)

$$x_c = \frac{AB}{2} = \frac{2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$= R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \text{ (datorită simetriei).}$$

2.12. PROBLEME PROPUSE

1. Asupra unei bare cotite ABC (fig.2.27) acționează forța $\vec{F} = -20\vec{i} + 30\vec{j} - 40\vec{k}$ (N). Să se calculeze momentul forței în polul O și față de brațul OB.

R. $\overrightarrow{M}_O = -330\vec{i} + 20\vec{j} + 180\vec{k}$ (N·m), iar
$M_O = 376{,}4$ N·m; $M_{OB} = -160$ N·m

2. Asupra unei roți dințate cu dinți înclinați (fig.2.28) acționează în planul tangent roții, perpendicular pe dinte, o forță Q. Cunoscând unghiul a de înclinare al dinților și raza R a roții, să se determine momentul forței Q în raport cu axa de rotație a roții.

R. $M_\Delta = R \cdot Q \cdot \cos\alpha$.

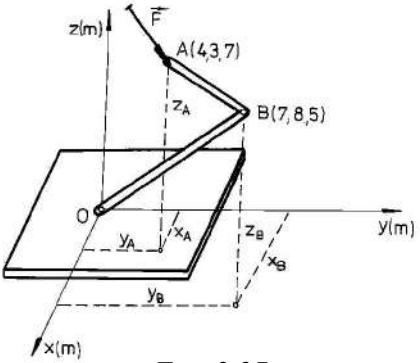


Fig. 2.27

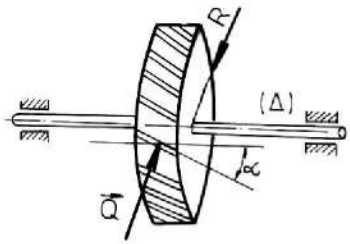


Fig. 2.28

3. La ridicarea unei greutăți din poziția B, cu ajutorul unei macarale de perete, în cablu se dezvoltă o forță S de 39 kN. Să se calculeze momentul pe care $\vec{S}$ îl produce față de baza O şi C a macaralei (fig. 2.29).

R.

$\vec{M}_O = -216\vec{i} - 90\vec{k}$ (kN · m);

$\vec{M}_C = -216\vec{i} + 180\vec{j} - 90\vec{k}$

$\vec{S} = 15\vec{i} - 36\vec{k}$ (kN)

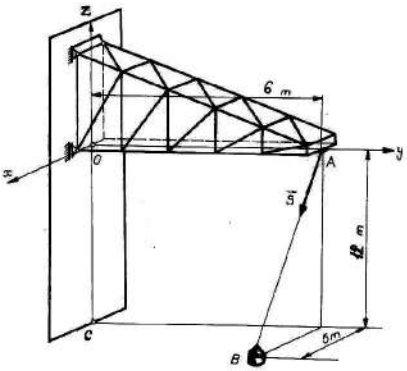


Fig. 2.29

4. Un sistem format din două cupluri $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$ şi $(\vec{F}_2, -\vec{F}_2)$ acționează asupra construcției din figura 2.30, ce are posibilitatea să se rotească în jurul axei verticale Oz. Cunoscând mărimile forțelor F_1 = 60 N, F_2 = 75 N, raza discului R = 1,2 m

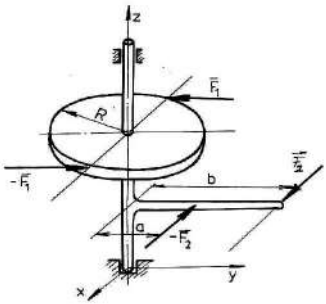


Fig. 2.30

şi braţele a = 1,7 m şi b = 2,5 m, să se determine momentul cuplului echivalent al sistemului.

R. $M_{Oz} = 84\,N \cdot m$

5. Asupra unei îmbinări sudate, formând unghiuri drepte acționează şase forțe cunoscute: $P_1 = P_2 = P_3 = P$, $P_4 = 2P$, $P_5 = 3P$, $P_6 = \sqrt{5P}$. Să se determine torsorul sistemului în polul O şi ecuațiile axei centrale (fig. 2.31).

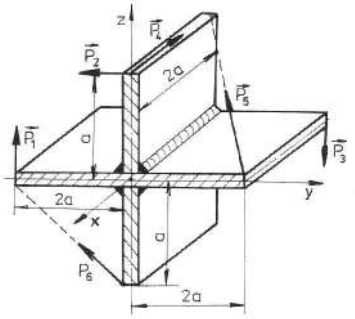


Fig. 2.31

R.

a) $\vec{R} = -4P\,\vec{i} - 5P\,\vec{j} + 2P\,\vec{k}$

$\vec{M}_O = -3aP\,\vec{i} - 4aP\,\vec{j} + 4aP\,\vec{k}$

b) $8x + 10y + 41z = a$

$10x - 10y - 5z = -5a$

6. Asupra unei pârghii cotite acționează patru forțe plane cunoscute P = 4 kN, Q = 6 kN, H = 10 kN, V = 18 kN, iar în alezajele pârghiei acționează cupluri de frecare ale căror momente sunt egale cu M_f = 0,5 Nm. Cunoscând unghiurile $\alpha = 30^O$ şi $\beta = 60^O$ să se determine elementele torsorului de reducere în raport cu polul O şi ecuația axei centrale (fig. 2.32).

R.

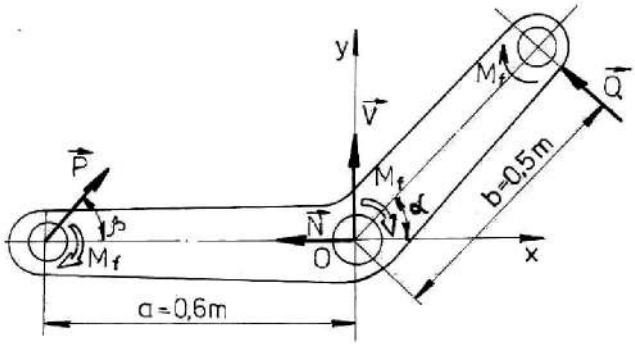


Fig. 2.32

7. Asupra unui baraj (fig. 2.33) acționează în plan median vertical, perpendicular pe cele două fețe ale barajului, forțele de presiune ale apei P =20 MN şi F=13 MN la distanțele H = 4 m şi h = 2,4 m de la bază. Greutatea părții dreptunghiulare a barajului este G_1 = 30 MN, iar a părții triunghiulare G_2 = 15 MN. Lățimea barajului la bază este b = 10 m iar la partea superioară a = 5 m iar tg a = 5/12. Se cere: a) să se reducă sistemul în polul O, b) să se determine ecuația axei centrale, c) să se verifice că suportul rezultantei intersectează baza de susținere a barajului.

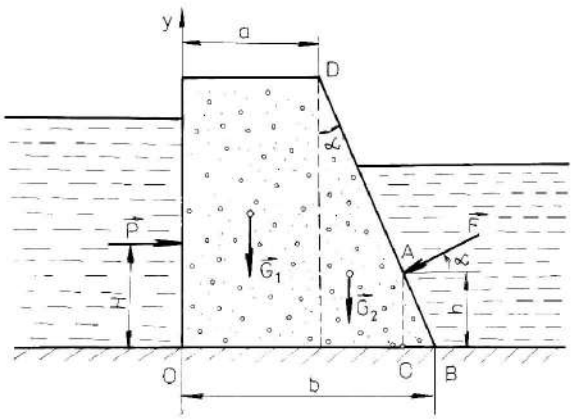


Fig. 2.33

R. a) $\vec{R} = 8\vec{i} - 50\vec{j}$ (MN), $\vec{M}_O = -271.2\vec{k}$ (MN · m)
b) $25x + 4y - 135{,}6 = 0$ c) $y = 0$, $x = 5{,}42$ m.

8. Se consideră un sistem de trei forțe $\vec{F}_1 = 100\vec{i}$, $\vec{F}_2 = 75\vec{j}$ şi $\vec{F}_3 = 50\vec{k}$. Ştiind că axa centrală a sistemului de forțe trece printr-un punct A (10; 0; 0) şi că mărimea momentului minim este $M_R = 200\sqrt{29}$, să se determine torsorul sistemului în punctul O, originea sistemului de referință.

R. $\vec{R} = 100\vec{i} + 75\vec{j} + 50\vec{k}$, $\vec{M}_O = 400\vec{i} - 200\vec{j} + 950\vec{k}$.

9. Asupra unei plăci rombice, acționează un sistem de forțe ca în figura 2.34. Cunoscând mărimile acestor forțe, $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2\sqrt{5}$ N, $P_5 = 8$ N, să se determine forța care echilibrează placa.

R. Forța care echilibrează placa este $\vec{Q} = 8\vec{i}$ și trece prin vârful B.

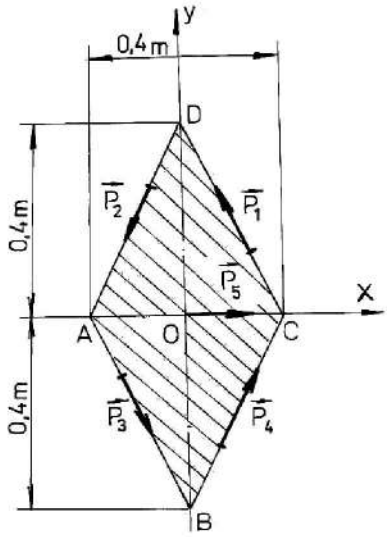


Fig. 2.34

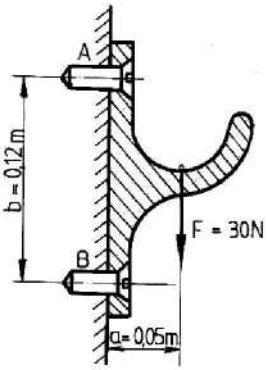


Fig. 2.35

10. Un cârlig este fixat prin șuruburi în A și B (v. fig. 2.35). Se cere: a) să se reducă forța F = 30 N în polul B; b) să se determine cele două forțe orizontale din A și B care dau un cuplu echivalent cu cel dat la punctul a).

R. a) $\vec{F} = -30\vec{k}\,;\ \vec{M}_B = -1{,}5\vec{i}$ b) $\vec{F}_A = -\vec{F}_B = 12{,}5\vec{j}$ (N)

11. Asupra unui paralelipiped de laturi a, b și c acționează sistemul format din forțele și cuplurile de momente $\vec{M}_1$ și $\vec{M}_2$ (fig. 2.36). Știind că $F_1 = F_2 = F_3 = P$ și $M_1 = 2bP$, $M_2 = 3aP$, se cer: a) torsorul de reducere în O și relația ce există între dimensiunile a, b, c, astfel ca sistemul dat să se reducă la o rezultantă unică; b) pentru a = 1 și b = 2 să se deducă

ecuația axei centrale și să se determine mărimea distanței de la O la axa centrală.

R.

a) $3b - c = 2a$;

b) $\frac{x+2/3}{P} = \frac{y-4/3}{P} = \frac{z+2/3}{P}$, $d = \frac{M_O}{R} = \sqrt{8/3}$

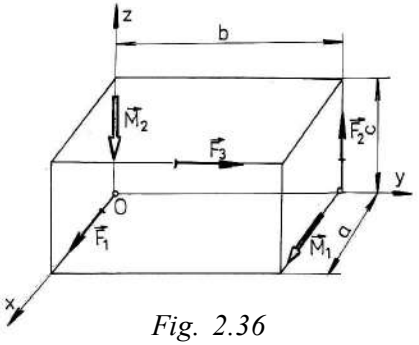


Fig. 2.36

12. Un sistem format din patru forțe $F_1 = F\sqrt{2}$, $F_2 = F\sqrt{5}$, $F_3 = 2F$, $F_4 = F$ acționează asupra paralelipipedului din figura 2.37. Să se reducă sistemul în polul O, să se calculeze torsorul minim și axa centrală.

R.

$\vec{R} = -F\vec{i} + F\vec{k}$;

$\vec{M}_O = -aF\vec{j} + 2aF\vec{k}$;

$M_R = aF\sqrt{2}$;

$y = a$ și $x + y = a$

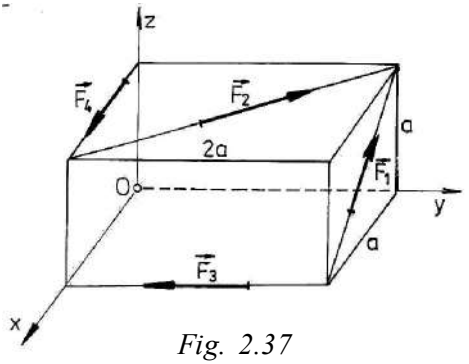


Fig. 2.37

13. Sistemul de forțe coplanare din figura 2.38 acționează asupra șaibelor solidare de rază a și 2a. Cunoscând $F_1 = 60$ N, $F_2 = 90$ N, $F_3 = 80$ N, $F_4 = 60\sqrt{2}$ N, să se determine poziția rezultantei unice a sistemului.

R.

$\vec{R} = -90\vec{i} - 140\vec{j}$

$(AC) \equiv 14x - 9z + a(20 - 12\sqrt{2}) = 0$

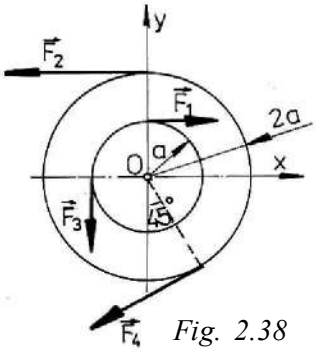


Fig. 2.38

3.

CENTRE DE MASĂ

3.1. Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale ... 57
3.2. Centrul de masă al corpurilor omogene simple..... 60
3.3 Centrul de masă al corpurilor omogene complexe 64
3.4. Probleme rezolvate 66
3.5. Probleme propuse 70

3

CENTRE DE MASĂ

3.1. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Se consideră un sistem format din n puncte materiale A_i (i=1,2,...,n) cu masele m_i situat în câmpul gravitațional al Pământului (fig.3.1). Sistemul de puncte fiind dispus la suprafața Pământului, este supus atracției acestuia, astfel că asupra fiecărui punct va acționa o forță numită greutate:

$$\vec{G}_i = m_i \cdot \vec{g} \qquad (3.1)$$

unde $\vec{g}$ este vectorul accelerației gravitaționale. Valoarea lui g este uşor variabilă cu latitudinea şi altitudinea, ca valoare aproximativă utilizată în tehnică se ia egală cu 9,81 m/s^2.

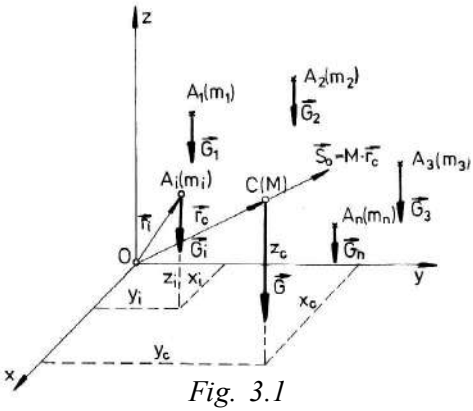


Fig. 3.1

Forțele $\vec{G}_i$ ce acționează asupra punctelor A_i au acelaşi sens fiind îndreptate spre centrul Pământului. Ținând seama de dimensiunile Pământului şi a sistemelor materiale situate la suprafața lui, aceste forțe pot fi considerate paralele.

Prin urmare, asupra sistemului material acționează vertical, forțele paralele $\vec{G}_i$.

Aceste forțe se reduc la o rezultantă unică $\vec{G}$, numită greutatea sistemului de puncte materiale:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}_i = \sum m_i \vec{g} = \vec{g} \sum m_i = M\vec{g}, \qquad (3.2)$$

unde M este masa întregului sistem de puncte materiale.

Punctul de aplicație al rezultantei acestor forțe este centrul forțelor paralele, care acum se va numi centru de greutate. Deci, determinarea centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale, reprezintă un caz particular al determinării centrului forțelor paralele, când forțele sunt greutăți.

Poziția centrului de greutate față de un reper O se determină prin vectorul de poziție $\vec{r}_c$ cu ajutorul unei relații de forma (2.45):

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_1^n \vec{r}_i G_i}{\sum_1^n G_i} \qquad (3.3)$$

Dacă se alege un sistem cartezian de referință cu originea în O, coordonatele x_C, y_C, z_C se obțin proiectând relația (3.3) pe axele reperului cartezian:

$$x_C = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}; \; y_C = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}; \; z_C = \frac{\sum z_i G_i}{\sum G_i} \qquad (3.4)$$

unde x_i, y_i, z_i sunt coordonatele punctelor A_i, ce alcătuiesc sistemul.

Dacă se ține seama de relația (3.2) avem:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{g \sum \vec{r}_i m_i}{g \sum m_i} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum M} \qquad (3.5)$$

şi $$x_C = \frac{\sum x_i m_i}{\sum M_i}; \; y_C = \frac{\sum y_i m_i}{\sum M_i}; \; z_C = \frac{\sum z_i m_i}{\sum M_i} \qquad (3.6)$$

Din relațiile (3.5) şi (3.6) se observă că poziția centrului de greutate nu mai depinde de greutățile punctelor ci numai de modul de distribuție a maselor. Această observație justifică denumirea de **centru de masă**

care este identică cu centru de greutate. Înseamnă că se poate vorbi de centrul maselor şi la corpurile care nu sunt situate în câmpul de atracţie al Pământului.

Relaţiile (3.5) şi (3.6) se pot scrie sub o altă formă:

$$M\vec{r}_c = \sum \vec{r}_i m_i = \vec{S}_O, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} Mx_c &= \sum x_i m_i = S_{yOz}; My_c = \sum y_i m_i = S_{xOz}; \\ Mz_c &= \sum z_i m_i = S_{xOy}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

unde $\vec{S}_O$ reprezintă momentul static polar al sistemului de puncte materiale în raport cu polul O; S_{xOy}, S_{yOz}, S_{xOz} -momentele statice planare ale sistemului de puncte materiale în raport cu planele de referinţă.

Relaţiile (3.7) şi (3.8) exprimă **teorema momentelor statice** pentru un sistem de puncte materiale, în raport cu polul O şi cu planele de referinţă. Enunţul acestei teoreme este: " Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu polul O, este egal cu produsul dintre masa sistemului şi vectorul de poziţie al centrului de masă faţă de acest pol, respectiv, momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan de referinţă, este egal cu produsul dintre masa sistemului şi distanţa de la centrul de masă la acest plan ".

Proprietăţi ale centrelor de masa: 1. Centrul de masă se poate defini ca punctul geometric faţă de care momentele statice ale sistemului sunt nule.

2. Centrul de masă al unui sistem există chiar în afara acţiunii gravitaţiei. Poziţia sa depinde numai de distribuţia maselor. În cazul corpurilor omogene poziţia centrului de masă nu depinde de natura materialului ci numai de forma lor geometrică.

3. Poziţia centrului de masă nu depinde de sistemul de referinţă ales.

4. Dacă un sistem material are o axă sau un plan de simetrie, centrul de masă se va găsi pe axa sau în planul respectiv de simetrie.

5. Centrul de masă se mai poate defini şi ca punctul în care poate fi concentrată întreaga masă a sistemului material, fără ca momentele statice să se modifice.

3.2. CENTRUL DE MASĂ AL CORPURILOR OMOGENE SIMPLE

Corpul solid rigid de formă oarecare (fig. 3.2) este format dintr-o infinitate de puncte de mase elementare dm, ce ocupă un domeniu (D) închis din spațiu. Asupra fiecărui punct va acționa o forță elementară dG = dm g, de greutate. Asupra întregului corp acționează astfel un sistem format dintr-un număr infinit de forțe elementare, paralele distribuite pe întregul volum. Vectorul de poziție al centrului forțelor paralele elementare, ce corespunde cu centrul de masă al corpului este:

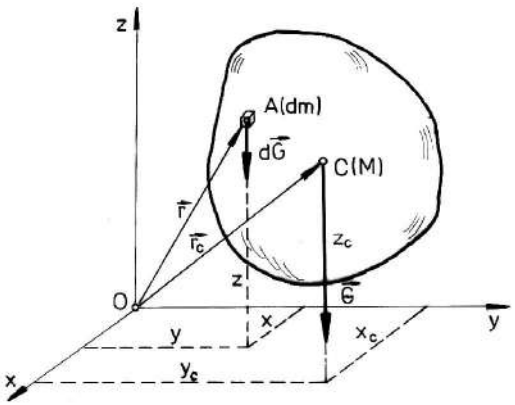


Fig. 3.2

$$\vec{r}_c = \frac{\int\limits_D \vec{r}dG}{\int\limits_D dG} = \frac{g\int\limits_D \vec{r}dm}{g\int\limits_D dm} = \frac{\int\limits_D \vec{r}dm}{M}, \tag{3.9}$$

unde M este masa întregului corp.

Proiectând relația (3.9) pe axele unui sistem cartezian de referință rezultă x_C, y_C, z_C coordonatele centrului de masă:

$$x_c = \frac{\int\limits_D xdm}{M}; z_c = \frac{\int\limits_D ydm}{M}; y_c = \frac{\int\limits_D zdm}{M}. \tag{3.10}$$

Relațiile (3.9) şi (3.10) se pot scrie sub forma:

$$M\vec{r}_c = \int\limits_D \vec{r}dm = \vec{S}_O; \tag{3.11}$$

$$Mx_c = \int_D xdm = S_{yOz}; My_c = \int_D ydm = S_{xOz}; Mz_c = \int_D zdm = S_{xOy}. \tag{3.12}$$

Relaţiile (3.11) şi (3.12) exprimă **teorema momentelor statice** pentru corpurile simple.

Această teoremă se enunţă în mod asemănător cazului sistemelor de puncte materiale (v. paragraful 3.1). Notaţiile au aceleaşi semnificaţii.

În cazul corpurilor omogene masa specifică (masa unităţii de volum, suprafaţă sau linie) este aceeaşi în orice punct al corpului. Cunoscând clasificarea corpurilor în bare, plăci şi blocuri se poate defini o densitate liniară ρ_L, densitatea superficială ρ_A şi o densitate volumică ρ.

Pentru corpurile omogene ρ fiind constant, iese de sub semnul integrală şi se simplifică, iar relaţiile (3.9) şi (3.10) devin:

- pentru bare omogene, $dm = \rho_L \cdot dl$:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_L \vec{r}dl}{\int_L dl}; x_c = \frac{\int_L xdl}{\int_L dl}; y_c = \frac{\int_L ydl}{\int_L dl}; z_c = \frac{\int_L zdl}{\int_L dl}; \tag{3.13}$$

unde x, y, z reprezintă coordonatele elementului de lungime dl, detaşat;

- pentru plăci omogene, $dm = \rho_A \cdot dA$;

$$\vec{r}_c = \frac{\int_A \vec{r}dA}{\int_A dA}; x_c = \frac{\int_A xdA}{\int_A dA}; y_c = \frac{\int_A ydA}{\int_A dA}; z_c = \frac{\int_A zdA}{\int_A dA}. \tag{3.14}$$

unde x, y, z reprezintă coordonatele centrului de greutate al elementului de arie dA, detaşat;

- pentru blocuri omogene, $dm = \rho \cdot dV$:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r}dV}{\int_V dV}; x_c = \frac{\int_V xdV}{\int_V dV}; y_c = \frac{\int_V ydV}{\int_V dV}; z_c = \frac{\int_V zdV}{\int_V dV}. \tag{3.15}$$

Observații: 1. În relațiile (3.13), (3.14), (3.15), integralele de la numărător reprezintă **momentele statice geometrice** ale barelor, suprafețelor sau blocurilor respective.

2. Determinarea poziției centrului de greutate la linii, suprafețe şi volume materiale omogene este o determinare geometrică deoarece poziția lui depinde numai de forma liniei, suprafeței sau volumului respectiv.

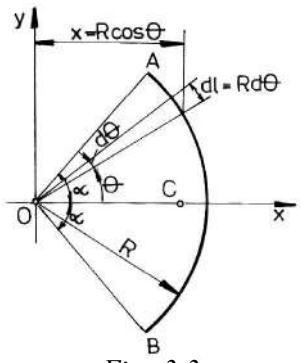


Fig. 3.3

Aplicații. **1. Centrul de masă al unei linii sub forma unui arc de cerc.**

Se consideră o bară omogenă având forma unui arc de cerc AB de rază R cu centrul în O şi unghiul la vârf 2α (fig. 3.3). Să se determine poziția centrului de greutate.

Rezolvare. Se alege sistemul de axe astfel încât una din axe Ox, să fie axă de simetrie. Centrul de masă se va afla pe axa $Ox\,(y_c = 0)$. Abscisa centrului de greutate se calculează cu relația (3.13):

$$x_C = \frac{\int\limits_L x\,dl}{\int\limits_L dl} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta \cdot R\,d\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\,d\theta} = \frac{R^2\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta}{2R\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

$$\text{Deci, } x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (3.16)$$

în care $x = R\cos\theta$ reprezintă abscisa elementului detaşat; $dl = R\,d\theta$ -elementul detaşat, de lungime elementară; α -semiunghiul la centru, în radiani.

2. Centrul de masă al unei plăci sub forma unui sector de cerc

Se consideră o placă omogenă având forma unui sector de cerc OAB de rază R, cu centrul în polul O şi unghiul la vârf 2α (fig. 3.4). Să se determine poziția centrului de masă.

Rezolvare. Se alege sistemul de axe de coordonate cu originea în O iar axa Ox, axă de simetrie.

Centrul de greutate se va afla pe axa de simetrie $Ox\,(y_c = 0)$. Se

detaşază o suprafaţă elementară dA cu ajutorul a două raze ce formează între ele unghiul elementar dθ. Suprafaţa detaşată se asimilează cu un triunghi isoscel de înălţime R şi de bază dl, având centrul de greutate C' la distanţa 2R/3 faţă de vârful O. Poziţia centrului de greutate C al plăcii omogene se calculează cu relaţia (3.14)

$$x_c = \frac{\int\limits_A x\,dA}{\int\limits_A dA} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3}R\cos\theta \cdot \frac{1}{2}R^2 d\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R \cdot R d\theta}{2}} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (3.17)$$

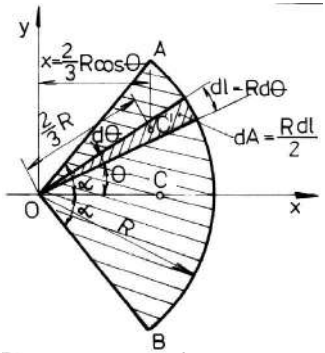


Fig. 3.4

unde x = (2/3) R cos θ reprezintă abscisa centrului de greutate C' a elementului de arie detaşat; dA = (1/2) R^2 dθ -elementul de arie detaşat; α -semiunghiul la centru, în radiani.

3. Centrul de masă al emisferei

Se consideră o emisferă, omogenă, de rază R. Să se determine poziţia centrului masă (fig. 3.5).

Rezolvare. Se alege axa de simetrie a emisferei, ca axă Oz iar originea sistemului în O. Corpul fiind omogen centrul de masă se va afla pe axa Oz $(x_C = y_C = 0)$. Coordonata z_C a centrului de masă se calculează cu relaţia (3.15). Se detaşază un volum elementar dV cu ajutorul a două plane paralele la distanţa z faţă de planul xOy, distanţa dintre ele fiind dz. Volumul detaşat se poate asimila cu un cilindru de rază y şi înălţime dz. Astfel rezultă:

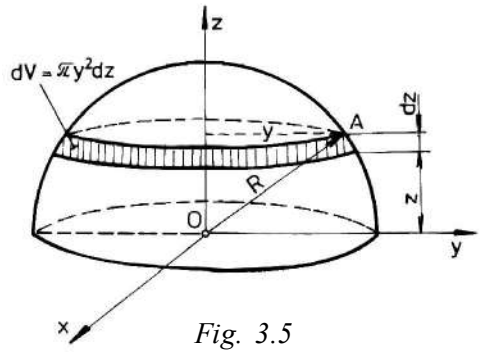


Fig. 3.5

$$z_c = \frac{\int\limits_V z dV}{\int\limits_V dV} = \frac{\int\limits_0^R z\pi\left(R^2 - z^2\right)dz}{\int\limits_0^R \pi\left(R^2 - z^2\right)dz} = \frac{3}{8}R, \qquad (3.18)$$

unde $dV = \pi y^2 \cdot dz = \pi\left(R^2 - z^2\right)dz$ reprezintă elementul de volum detaşat; z - cota centrului de greutate a elementului de volum detaşat iar $y^2 = R^2 - z^2$, raza la pătrat a cilindrului detaşat.

3.3. CENTRUL DE MASĂ AL CORPURILOR OMOGENE COMPLEXE

În figura 3.6 se consideră un corp omogen compus (cu cavitate), realizat prin alipirea corpurilor $(S_1), (S_2)$ şi (S_3) iar din (S_3) se scoate corpul (S_4). Se presupune cunoscute masele m_1, m_2 ale corpurilor (S_1) şi (S_2) masa m_3 a corpului (S_3) considerat plin, umplut cu acelaşi material, masa m_4 a corpului care lipseşte, precum şi vectorii de poziţie $\vec{r}_i$ (i = 1,2,3,4) ai centrelor de masă ale acestor corpuri. Masele corpurilor pot fi considerate concentrate în centrele de masă ale fiecărui corp, fără ca momentele statice să se modifice. Din aceste considerente poziţia centrului de masă al întregului corp omogen compus din alte corpuri simple se determină cu ajutorul relaţiei (3.5) stabilite pentru sistemul de puncte materiale:

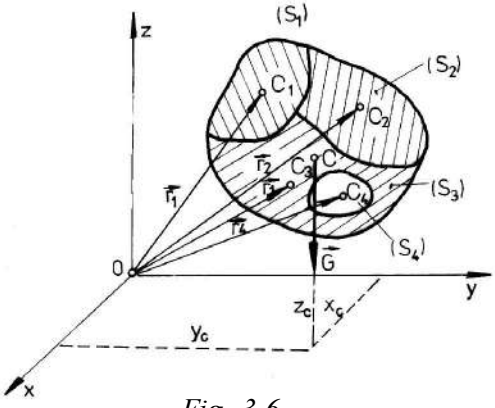


Fig. 3.6

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3 - \vec{r}_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 - m_4}.$$

Cunoscând coordonatele centrelor de masă ale corpurilor simple, coordonatele centrului de masă al corpului omogen complex, într-un sistem de referință cartezian,se determină cu relația (3.6) ținând seama că masa efectivă a corpului este:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 - m_4.$$

Şi pentru corpuri omogene compuse se poate defini o densitate liniară, o densitate superficială şi o densitate volumică, astfel încât relațiile necesare pentru determinarea poziției centrelor de greutate ale barelor, plăcilor şi blocurilor omogene compuse sunt:

- pentru bare omogene compuse, $m_i = \rho_L \cdot l_i$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i l_i}{\sum l_i}; x_c = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}; y_c = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}; z_c = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}; \qquad (3.19)$$

- pentru plăci omogene compuse, $m_i = \rho_A \cdot A_i$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i A_i}{\sum A_i}; x_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}; z_c = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}; \qquad (3.20)$$

- pentru blocuri omogene compuse, $m_i = \rho \cdot V_i$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i V_i}{\sum V_i}; x_c = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}; y_c = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}; z_c = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}; \qquad (3.21)$$

Pentru simplificarea şi sistematizarea calculelor, determinarea centrelor de masă la bare, plăci şi blocuri omogene compuse se poate face tabelar. Calculul poziției centrului de masă al unui corp se face parcurgând *următoarele etape*:

- se descompune corpul complex în mai multe corpuri simple, componente, ale căror centre de masă sunt cunoscute sau se pot determina uşor;

- se alege acel sistem de axe de coordonate care poate aduce simplificări în calcule (axele de coordonate să coincidă cu axele de simetrie ale corpurilor);

- se întocmeşte tabelul corespunzător şi se efctuează calculele pe baza relaţiilor stabilite mai sus.

3.4. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze poziţia centrului de masă al barei omogene compuse din figura 3.7.

Rezolvare. Se împarte bara omogenă în patru linii simple şi se marchează centrele de masă ale fiecărei linii. Se calculează distanţele:

$$O'C_1 = a\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2a}{\pi};$$

$$OC_4 = a\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

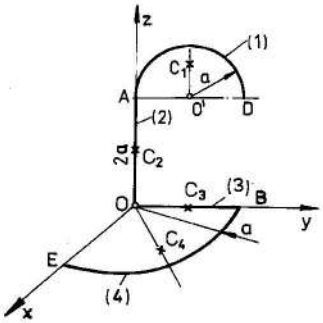


Fig. 3.7

Calculele sunt prezentate în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Nr. liniei	Simbol	x_i	y_i	z	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$	$z_i l_i$
1	⌒	0	a	$2a+2a/\pi$	πa	0	πa^2	$2\pi a^2+2a^2$
2	|	0	0	a	2a	0	0	$2a^2$
3	—	0	a/2	0	a	0	$a^2/2$	0
4	⌓	$2a/\pi$	$2a/\pi$	0	$\pi a/2$	a^2	a^2	0
				$\sum$	$\frac{3(\pi+2)a}{2}$	a^2	$\frac{(2\pi+3)a^2}{2}$	$2(\pi+2)a^2$

Coordonatele centrului de masă sunt:

$$x_c = \frac{2}{3(\pi+2)}a = 0{,}12a;$$

$$y_c = \frac{2\pi+3}{3(\pi+2)}a = 0{,}60a;\ z_c = \frac{4}{3}a = 1{,}33a.$$

2. Să se determine poziția centrului de greutate a plăcii omogene compuse din figura 3.8.

Rezolvare. Se împarte suprafața compusă a plăcii în trei suprafețe simple şi se calculează distanțele:

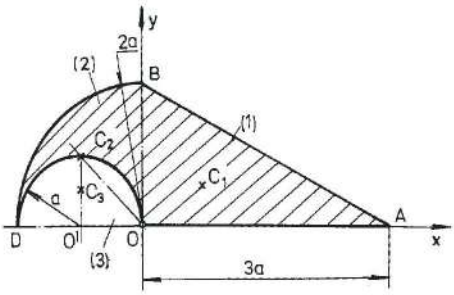


Fig. 3.8

$$OC_2 = \frac{2}{3}2a\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{16a}{3\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$O'C_3 = \frac{2}{3}a\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Tabelul 3.2

Nr. suprafeței	Simbol	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1		a	$\frac{2a}{3}$	$3a^2$	$3a^3$	$2a^3$
2		$-\frac{8a}{3\pi}$	$\frac{8a}{3\pi}$	πa^2	$-\frac{8a^3}{3}$	$\frac{8a^3}{3}$
3		$-a$	$\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{\pi a^3}{2}$	$-\frac{2a^3}{3}$
			$\sum$	$\frac{(6+\pi)a^2}{2}$	$\frac{(2+3\pi)a^3}{6}$	$4a^3$

Restul calculelor sunt centralizate în tabelul 3.2.

Coordonatele centrului de masă sunt:

$$x_c = \frac{2+3\pi}{3(6+\pi)}a \cong 0{,}41a;$$

$$y_c = \frac{8}{6+\pi}a \cong 0{,}87a.$$

3. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al sistemului de corpuri omogene din figura 3.9.

Rezolvare. Se împarte volumul omogen complex în

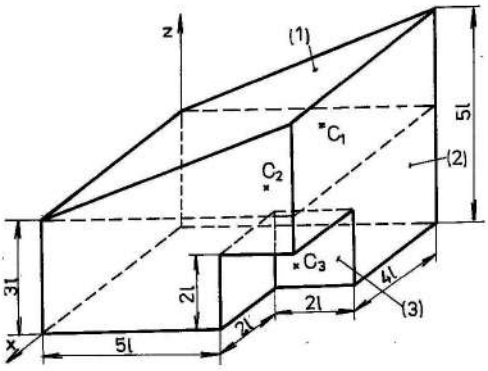


Fig. 3.9

trei corpuri simple: o prismă triunghiulară, un paralelipiped şi un cub.

Calculele s-au centralizat în tabelul 3.3.

Coordonatele centrului de masă sunt:

$$x_c = \frac{464}{160}l = 2{,}91l;$$

$$y_c = \frac{589}{160}l = 3{,}681;$$

$$z_c = \frac{335}{160}l = 2{,}091.$$

Tabelul 3.3

Nr. vol.	x_i	y_i	z_i	V_i	x_iV_i	y_iV_i	z_iV_i
1	$3l$	$\frac{14l}{3}$	$\frac{8l}{3}$	$42l^3$	$126l^4$	$196l^4$	$112l^4$
2	$3l$	$\frac{7l}{2}$	$\frac{3l}{2}$	$126l^3$	$378l^4$	$441l^4$	$189l^4$
3	$5l$	$6l$	l	$-8l^3$	$-40l^4$	$-48l^4$	$-8l^4$
			$\sum$	$160l^3$	$464l^4$	$589l^4$	$293l^4$

4. Determinarea diametrului rondelei de ambutisare a unui vas.

Rezolvare. Diametrul D al rondelei de abutisare se determină echivalând aria suprafeţei rondelei cu aria suprafeţei de rotaţie a liniei compuse din figura 3.10,c faţă de axa de simetrie a vasului utilizând teorema I-a a lui Pappus şi Guldin. Grosimea vasului se neglijează comparativ cu diametrele vasului:

$$\frac{\pi D^2}{4} = 2\pi\sum_1^3 x_i \quad \text{iar} \quad D = \sqrt{8\sum_1^3 x_i}$$

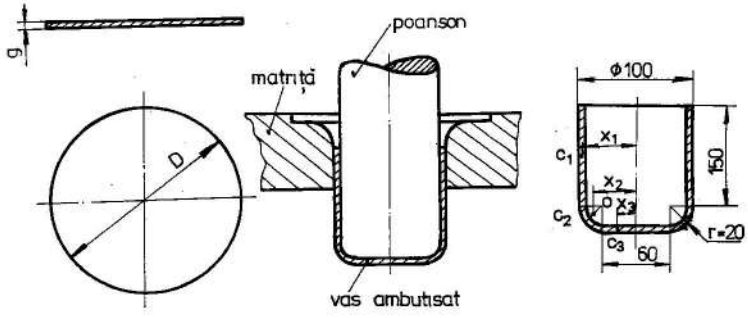


Fig. 3.10

Înlocuind valorile numerice rezultă:

$$D = \sqrt{8\left(x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3\right)} =$$

$$= \sqrt{8\left[50 \cdot 150 + \left(30 + \frac{160}{3\pi}\right) \cdot 10\pi + 15 \cdot 30\right]} = 274{,}60\text{mm}$$

$$x_2 = 2x_3 + OC_2 \cdot \cos 45^\circ = 2x_3 + \frac{2}{3} r \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} \cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= 30 + \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 83{,}33\text{mm}.$$

***5.* Determinarea dimensiunilor brute ale semifabricatului unui pinion forjat.** Pentru obținerea prin forjare a pinionului din figura 3.11 este necesar un semifabricat sub forma unei bare cilindrice de diametru D şi înălțime H=1,5D. Ținând seama de coeficientul de pierderi prin forjare, b=1,25 datorită bavurilor şi a pierderilor prin ardere, să se determine dametrul D al semifabricatului.

Rezolvare. Diametrul D al semifabricatului se determină echivalând volumul barei cilindrice de forma (π $D^2/4$)H cu volumul piesei finite majorate cu coeficientul b, rezultat prin rotirea suprafeței haşurate

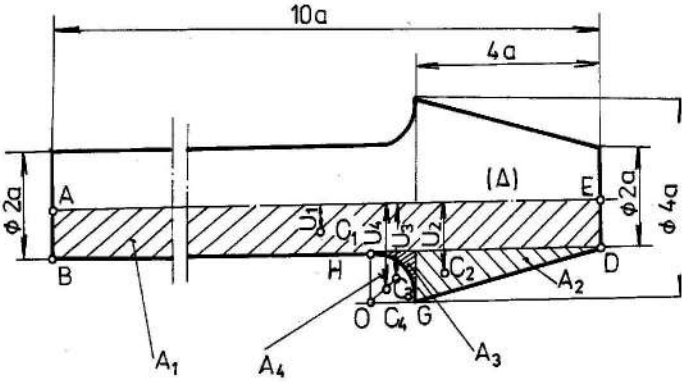


Fig. 3.11

(fig.3.11) în jurul axei de simetrie. Acest calcul reprezintă o aplicație tehnică a celei de-a doua teoreme a lui Pappus şi Guldun, exprimată prin relația:

$$\frac{\pi D^2}{4}\cdot H = \beta\cdot 2\pi\cdot\sum_1^4 u_i A_i,$$

de unde rezultă: $D = \sqrt[3]{\frac{10}{1{,}5}\sum_1^4 u_i A_i}$.

Calculul se face tabelar, împărțind suprafața haşurată în figuri geometrice simple: un dreptunghi ABDE cu centrul C_1, triunghiul DFG cu centrul C_2, patratul FGHO cu centrul C_3 din care se elimină sfertul de cerc de rază a cu centrul în C_4. Calculul este prezentat în tabelul 3.4.

Rezultă: $D = \sqrt[3]{\frac{10}{1{,}5}\cdot\frac{19-\pi}{2}\cdot a^3} = 3{,}75a.$

3.5. PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine poziția centrului de greutate a liniei materiale omogene din figura 3.12.

R. $x_c = (2/7)\,a$; $y_c = (26/7\pi)\,a$.

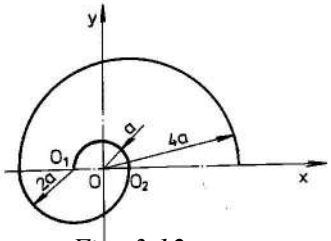


Fig. 3.12

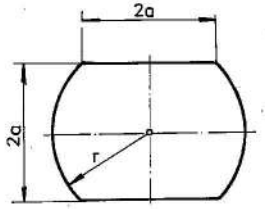


Fig. 3.13

2. Să se determine suprafața laterală şi volumul unui semifabricat având forma şi dimensiunile din figura 3.13.

R. $A = 2\pi a^2(1+2\sqrt{2})$; $V = (10/3)\pi a^3$

3. Să se determine diametrul rondelei din a cărei ambutisare se obține vasul de revoluție din figura 3.14.

R. d = 325 mm.

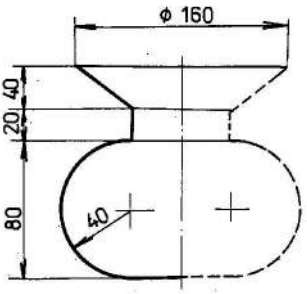


Fig. 3.14

4. O bară AD de lungime l şi grosime uniformă este formată astfel: de la A la B, mijlocul barei, este formată dintr-un metal având greutatea specifică γ_1 iar de la B la D dintr-un alt metal de greutate specifică γ_2. Ştiind că centrul de greutate al barei se află la 2l/3 față de capătul A al barei, să se determine raportul greutăților specifice ale metalelor.

R. $\gamma_1 / \gamma_2 = 5$.

5. Să se determine volumul capacului din figura 3.15, utilizând formula lui Pappus şi Guldin.

R. V = 13,417 dm^3.

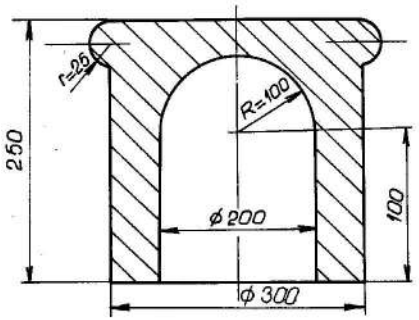


Fig 315

6. Să se determine poziția centrului de greutate al suprafeței materiale omogene compuse din figura 3.16, având forma unui jgheab. La un capăt al jgheabului se află un capac semicircular de rază a.

R.

$$x_c = \frac{2(4-3\pi)}{8+9\pi}a; \quad y_c = \frac{9\pi}{8+9\pi}a;$$

$$z_c = \frac{2(2-6\pi)}{3(8+9\pi)}a$$

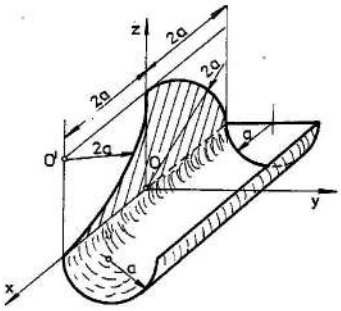


Fig. 3.16

7. Să se determine coordonatele centrului de greutate al colțarului din figura 3.17.

R. $x_C = 10,3$ mm ; $y_C =$ 71,74 mm; $z_C = 48,57$ mm .

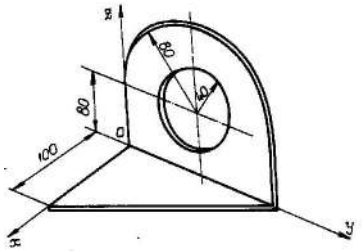


Fig. 3.17

8. Să se determine poziția centrului de greutate când: a) dintr-un semicerc de rază R se scoate un triunghi echilateral de înălțime h = R; b) dintr-o emisferă de rază R se scoate un con de înălțime R având la vârf un unghi de 60^O.

R. a) $y_C = 0,48$ R; b) $y_C = 0,4$ R .

9. Să se afle poziția centrului de greutate al unui trunchi de con omogen, având razele bazelor R, respectiv 2R şi înălțimea 2R.

R. $x_C = y_C = 0$; $z_C = (11/14)$ R .

10. Se cere determinată înălțimea semifabricatului cilindric de diametru d = 120 mm, din care prin matrițare se obține piesa brută din figura 3.18.

R. h = 405, 6 mm.

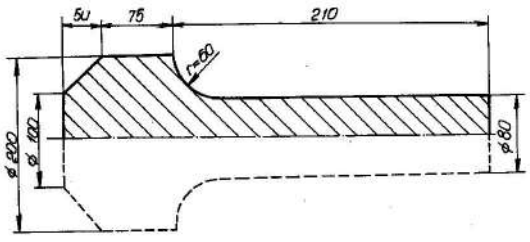


Fig. 3.18

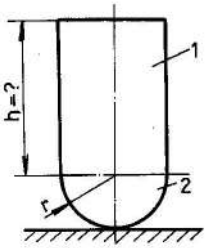


Fig. 3.19

11. Să se afle cel mai înalt hopa-mitică format dintr-o emisferă de rază r şi densitate ρ_2 şi cilindrul de aceeaşi rază şi densitate ρ_1 aşezat deasupra emisferei (fig. 3.19).

R. $h \le r\sqrt{\frac{\rho_2}{2\rho_1}}$.

12. Să se determine poziția centrului de greutate al piesei omogene din figura 3.20.

R. $x_C = 2{,}405$ m; $y_C = 5{,}556$ m; $z_C = 80$ mm

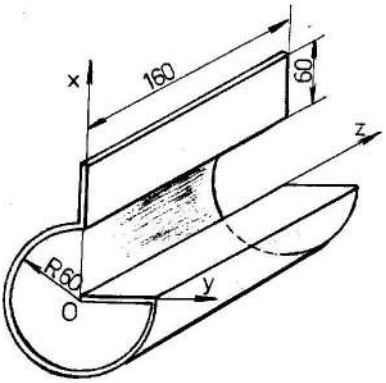


Fig. 3.20

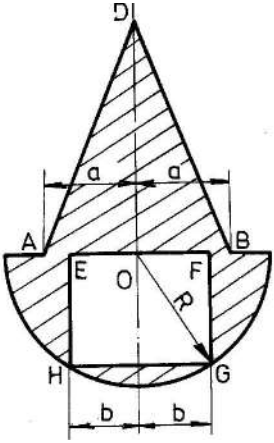


Fig. 3.21

13. O placă omogenă este formată dintr-un triunghi isoscel cu baza AB = 2a şi înălțimea OD = R şi un semicerc de rază R cu centrul în O, din care s-a decupat un dreptunghi cu laturile EF = 2b şi $EH = \sqrt{R^2 - b^2}$. Se cere să se determine segmentele a şi b astfel încât să fie verificate următoarele condiții: a) centrul de greutate al plăcii haşurate, să coincidă cu punctul O;

b) aria dreptunghiului EFGH care se decupează, să fie maximă (fig.3.21).

R. $a = 2R - \frac{3R}{2\sqrt{2}} = 0.939R$; $b = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707R$

.

14. Să se determine poziția centrului de masă pentru plăcile omogene din figurile 3.22 și 3.23.

R. Placa din figura 3.22:

$$x_c = \frac{-2a}{12+3\sqrt{3}-2\pi};\ y_c = \frac{(\pi\sqrt{3}+3)a}{4(12+3\sqrt{3}-2\pi)}$$

Placa din figura 3.23:

$$x_c = \frac{4(2-\sqrt{2})a}{3(4-\pi)};\ y_c = \frac{4(\sqrt{2}-1)a}{3(4-\pi)}.$$

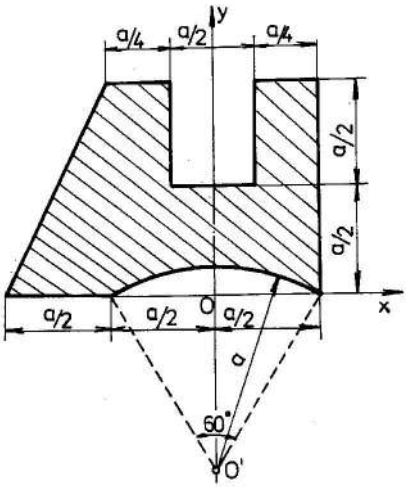


Fig. 3.22

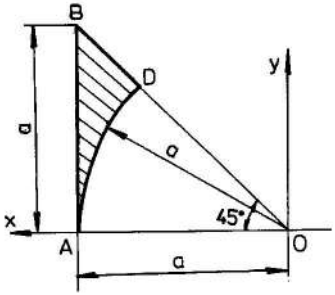


Fig. 3.23

4.

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

4.1. Echilibrul forțelor ce acționează asupra punctului material liber 77
4.2. Punctul material supus la legături fără frecare 78
4.2.1. Legăturile mecanice ale punctului material 78
4.3. Punctul material supus la legături cu frecare 81
4.3.1. Frecarea de alunecare. Legile frecării uscate 81
4.3.2. Echilibrul punctului material pe o suprafață aspră 84
4.3.3. Echilibrul punctului material pe o curbă aspră 85
4.4. Probleme rezolvate 86
4.5. Probleme propuse 90

4

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

4.1. ECHILIBRUL FORȚELOR CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Punctul material liber este punctul material care poate ocupa orice poziție în spațiu sub acțiunea forțelor ce-i sunt aplicate. În spațiul euclidian tridimensional poziția unui punct material este determinată față de un sistem de referință ales, de trei parametrii geometrici scalari independenți.

Numărul parametrilor geometrici independenți necesari pentru precizarea poziției unui sistem material față de un sistem de referință ales, determină numărul gradelor de libertate.

Rezultă că prin grad de libertate se înțelege posibilitatea pe care o are sistemul material de a se deplasa după o anumită direcție definită de sistemul de referință ales. Gradele de libertate pot fi interpretate şi ca grade de mobilitate.

Deci, punctul material liber are în spațiu trei grade de libertate.Cei trei parametri scalari independenți pot fi aleşi ca fiind coordonatele punctului material în sistemul de referință ales.

Astfel putem alege: coordonatele carteziene x, y, z; coordonatele cilindrice ρ, θ, z; coordonatele sferice ρ, θ, φ.

Poziția punctului material liber depinde numai de sistemul de forțe ce acționează asupra lui. Condiția necesară şi suficientă ca un punct material liber să fie în repaus sau mişcare rectilinie şi uniformă, este ca sistemul de forțe ce acționează asupra lui să fie în echilibru, adică rezultanta lor să fie nulă:

$$\vec{R} = \sum X_i \vec{i} + \sum Y_i \vec{j} + \sum Z_i \vec{k} = 0 \qquad (4.1)$$

Această relație reprezintă condiția de echilibru a forțelor concurente; această condiție, sub forma ecuației vectoriale, rezultă şi din aplicarea

principiilor inerţiei şi acţiunii forţei.

Condiţiile de echilibru ale forţelor ce acţionează asupra punctului material se pot scrie sub forma ecuaţiilor scalare astfel:

- dacă forţele sunt în spaţiu:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0; \tag{4.2}$$

- dacă forţele sunt coplanare (concurente în planul Oxy):

$$\sum_1^n X_i = 0; \sum_1^n Y_i = 0. \tag{4.3}$$

4.2. PUNCTUL MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARE

4.2.1. Legăturile mecanice ale punctului material

Dacă punctului material i se pun anumite restricţii geometrice, adică este obligat să ocupe anumite poziţii în spaţiu, atunci se spune că punctul material este supus la legături. Faţă de un punct material liber, punctul material supus la legături va avea un număr redus de grade de libertate. De exemplu, un punct material obligat să rămână pe o suprafaţă fixă din spaţiu are două grade de libertate, iar pe o curbă fixă are un singur grad de libertate. O legătură este fără frecare atunci când suprafaţa sau curba pe care se află punctul material, se consideră perfect lucioasă, ideală şi deci nu poate apărea o forţă de frecare. În realitate, astfel de legături nu există, dar pot fi aproximate ca fiind lucioase, când forţa de frecare este mică şi neglijabilă.

Legăturile punctului material sunt de două feluri:

a) rezemarea pe o suprafaţă sau o curbă fixă;

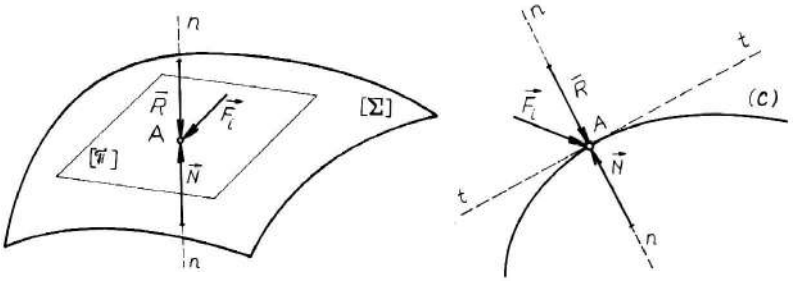
b) legătura cu fir sau bară rigidă.

În studiul legăturilor mecanice se urmăresc două aspecte: **aspectul geometric**, care se referă la numărul gradelor de libertate anulate de legătura respectivă şi **aspectul mecanic** referitor la elementele mecanice cu care se înlocuieşte legătura.

În figura 4.1,a s-a reprezentat un punct A rezemat pe o suprafaţă,

asupra lui acţionând un sistem de forţe $\vec{F}_i$. Punctului material îi rămân numai două grade de libertate. Suprafaţa împiedică deplasarea pe direcţia normală şi răspunde cu o forţă de reacţiune pe această direcţie, conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Condiţia de echilibru a punctului material rezemat fără frecare, sub forma ecuaţiei vectoriale este:

$$\vec{R} + \vec{N} = 0, \text{ unde } \vec{R} = \sum_{1}^{n} \vec{F}_i, \tag{4.4}$$



a) *b)*

Fig.4.1

care este echivalentă cu trei ecuaţii de echilibru scalare. Aceste ecuaţii se folosesc pentru determinarea poziţiei de echilibru a punctului şi reacţiunii $\vec{N}$. Relaţia (4.4) exprimă faptul că punctul rezemat fără frecare este în echilibru pe suprafaţa respectivă când rezultanta forţelor exterioare este pe direcţia reacţiunii normale.

Dacă ecuaţia suprafeţei este dată sub forma carteziană implicită:

$$f(x,y,z)=0, \tag{4.5}$$

reacţiunea normală $\vec{N}$, la suprafaţă are expresia:

$$\vec{N} = \lambda \cdot \text{gradf} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \tag{4.6}$$

unde λ este un parametru scalar care determină valoarea algebrică a reacţiunii $\vec{N}$.

Ecuaţiile de echilibru scalare ale punctului se vor scrie:

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0;Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0;Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0, \qquad (4.7)$$

unde X, Y, Z sunt componentele scalare ale reacțiunii $\vec{R}$.

Ecuațiile (4.5) şi (4.7) constituie un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute: coordonatele x, y, z ale poziției de echilibru pe suprafață şi parametrul λ, care determină reacțiunea $\vec{N}$.

Aceeaşi condiție de echilibru (4.4) sub forma ecuației vectoriale se scrie şi pentru punctul material *rezemat pe o curbă fixă* din figura 4.1,b. Acest punct are un singur grad de libertate iar deplasarea pe direcția normalei este împiedicată şi răspunde cu o forță de reacțiune pe această direcție.

Dacă ecuația curbei este dată sub forma carteziană implicită, ca intersecție a două suprafețe:

$$f(x,y,z)=0 \text{ şi } g(x,y,z)=0 \qquad (4.9)$$

reacțiunea normală $\vec{N}$ din planul normal la curbă, poate fi exprimată ca suma componentelor sale după direcțiile normale la cele două suprafețe în poziția de echilibru:

$$\vec{N}=\lambda_1 \text{grad} f+\lambda_2 \text{grad} g, \qquad (4.10)$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt doi parametri scalari care determină valoarea algebrică şi direcția reacțiunii $\vec{N}$ în planul normal la curbă. Astfel, ecuația (4.4) completată cu ecuația (4.9) conduce la trei ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{aligned} &X+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial x}=0;\\ &Y+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial g}{y}=0; \qquad (4.11)\\ &Z+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial g}{z}=0. \end{aligned}$$

unde X, Y, Z sunt proiecțiile rezultantei pe axele sistemului de coordonate.

Ecuațiile (4.11) şi (4.9) formează un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute: coordonatele x, y, z ale poziției de echilibru pe curbă şi parametrii λ_1 şi λ_2, care determină reacțiunea $\vec{N}$.

Studiul echilibrului punctului material cu legături presupune aplicarea

AXIOMEI LEGĂTURILOR. Conform acestei axiome orice legătură mecanică se înlocuieşte cu o forţă de reacţiune. Punctul material eliberat de legături devine liber, dar acţionat de forţe exterioare date şi de forţele de reacţiune, din legături.

Condiţia de echilibru se exprimă în cazul punctului material cu legături prin anularea rezultantei tuturor forţelor, a celor exterioare date şi a celor de reacţiune din legături. Relaţiile vectoriale ce exprimă condiţiile de echilibru ale forţelor ce acţionează asupra punctului material cu legături se proiectează pe axele unui sistem de referinţă obţinându-se trei ecuaţii scalare, dacă forţele sunt spaţiale şi două ecuaţii dacă forţele sunt coplanare.

4.3. PUNCTUL MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

4.3.1. Frecarea de alunecare. Legile frecării uscate

Din practică se ştie că suprafeţele de contact dintre corpuri oricât de bine ar fi prelucrate, prezintă totuşi unele asperităţi, invizibile cu ochiul liber, care sub acţiunea forţelor exterioare se întrepătrund realizând o aşa numită "angrenare". La apariţia unei tendinţe de mişcare, apar în planul tangent al corpurilor în contact forţe care se opun mişcării, numite forţe de frecare de alunecare.

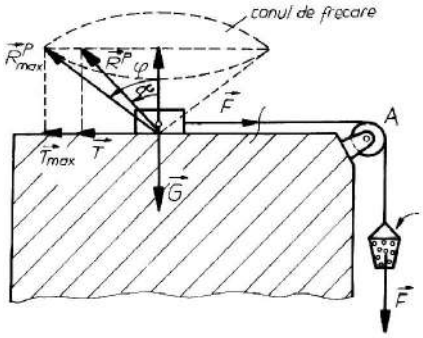


Fig. 4.2

Punerea în evidenţă a acestor forţe şi studiul frecării se poate face cu ajutorul dispozitivului numit TRIBOMETRU prezentat în figura 4.2. Se consideră un corp de greutate $\vec{G}$ de dimensiuni neglijabile (asimilate cu un punct material) aşezat pe un plan orizontal. Corpul este acţionat de o forţă orizontală $\vec{F}$ care poate varia continuu prin intermediul firului trecut

peste scripetele A şi în capătul căruia este fixat un păhărel în care se introduc alice. Se consideră că deşi s-au introdus în păhărel alice, corpul de greutate $\vec{G}$ rămâne totuşi în echilibru. Aceasta demonstrează că există o altă forţă orizontală $\vec{T}$ opusă lui $\vec{F}$, care, echilibrând-o face ca acest corp să rămână în repaus.

Forţa $\vec{T}$ ce echilibrează forţa $\vec{F}$ în poziţia de repaus a corpului se numeşte **forţă de aderenţă.** Dacă vom continua să introducem alice în păhărel, constatăm că acest corp rămâne în repaus până la o valoare maximă a forţei orizontale de acţiune $\vec{F}_{max}$, după care corpul se pune în mişcare, alunecă. La limită, forţa de acţiune maximă $\vec{F}_{max}$ este echilibrată de forţa de aderenţă maximă $\vec{T}_{max}$, numită **forţă de frecare de alunecare.**

După apariţia alunecării se va vorbii de o frecare dinamică. În cazul punctului material rezemat pe o suprafaţă aspră, reacţiunea totală $\vec{R}^P$ nu va mai fi normală la suprafaţa de sprijin ci va fi înclinată faţă de aceasta cu unghiul α (fig. 4.2). A doua componentă a reacţiunii este forţa de frecare $\vec{T}$. Deci:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{T}{N}, \text{ştiind că } \alpha_{max} = \varphi \text{ rezultă} \tag{4.13}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{T_{max}}{N} = \mu. \tag{4.14}$$

unde μ -este coeficientul de frecare la alunecare; φ - unghiul de frecare.

Pentru poziţia de repaus trebuie respectată inegalitatea:

$$T \le T_{max} \text{ sau} \alpha \le \varphi, \text{ deci} T \le \mu \cdot N \tag{4.15}$$

În urma experienţelor făcute de Coulomb încă din 1781 asupra forţelor de frecare de alunecare s-a reuşit să se enunţe **legile frecării uscate:**

1. Forţa de frecare de alunecare este direct proporţională cu mărimea reacţiunii normale dintre corpurile în contact.

2. Forţa de frecare de alunecare depinde de natura şi starea suprafeţelor în contact.

3. Forţa de frecare de alunecare nu depinde de vitezele relative mici ale corpurilor în contact şi nici de mărimea suprafeţelor în contact.

Revenind la experienţa cu ajutorul tribometrului, se poate ajunge la aspectul geometric al echilibrului punctului material, rezemat pe o suprafaţă

aspră. Considerând că forța maximă $\vec{F}_{max}$ își schimbă direcția în planul tangent în mod continuu cu 360^O, atunci reacțiunea totală $\vec{R}^P_{max}$ va descrie în această situație un con, numit CON DE FRECARE. Acest con are vârful în punctul considerat, axa de simetrie fiind direcția normalei $\vec{N}$ la suprafață și unghiul la vârf 2φ.

Acum se poate spune că punctul material se află în echilibru (repaus) pe o suprafață aspră când reacțiunea totală $\vec{R}^P$ se află în interiorul conului, s-au la limita echilibrului când se află pe suprafața conului. În concluzie, pentru ca punctul material să fie în repaus, suportul reacțiunii totale trebuie să facă cu normala un unghi mai mic decât unghiul de frecare φ. Frecarea de alunecare se poate studia și interpreta cu ajutorul graficului din figura 4.3. Dacă forța de acțiune $\vec{F}$ este nulă, din condiția de echilibru rezultă că și forța de reacțiune $\vec{T}$ este nulă. Pe măsură ce forța $\vec{F}$ crește și forța de reacțiune $\vec{T}$ crește atâta timp cât corpul rămâne în repaus. Pentru această stare, cât corpul este în repaus, forța tangentă la reacțiunea $\vec{T}$ se numește forță de aderență, corespunzătoare frecării statice. Când forța $\vec{F}$ atinge valoarea maximă, corpul se pune în mișcare, aceasta constituind limita echilibrului. Forța de aderență ia valoare maximă, $\vec{T}_{max}$, aceasta fiind numită forță de frecare de alunecare. În acest moment forța de frecare scade destul de abrupt, dar puțin, la o valoare mai mică, apoi rămâne aproape constantă cu creșterea forței $\vec{F}$, respectiv cu creșterea vitezei relative a corpurilor în contact.

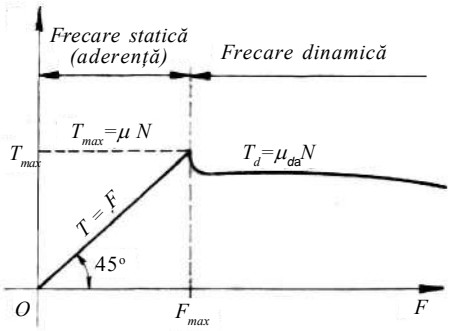


Fig. 4.3

După apariția alunecării începe perioada a doua când vorbim de o frecare dinamică. Forța de frecare dinamică este ceva mai mică decât valoarea maximă a forței de aderență, dar și ea este proporțională cu reacțiunea normală $\vec{N}$, adică:

$T_d = \mu_d \cdot N, \mu_d < \mu$

unde μ_d este coeficientul de frecare dinamică.

În general, în aplicații se va lucra cu o singură relație, $T = \mu N$, urmând ca în fucție de enunțul concret să se introducă coeficientul de frecare statică sau cel de ferecare dinamică.

4.3.2. Echilibrul punctului material pe o suprafață aspră

În paragraful anterior s-a stabilit condiția de echilibru a punctului material rezemat pe o suprafață aspră. Analitic, această condiție se scrie sub forma:

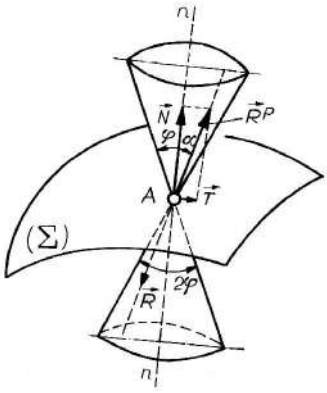


Fig. 4.4

$$\alpha \le \varphi \text{ sau } \cos\alpha \ge \cos\varphi, \quad (4.16)$$

unde φ este unghiul conului de frecare; tg $\varphi=\mu$, coeficientul de frecare de alunecare; α unghiul pe care îl face rezultanta forțelor exterioare $\vec{R}$ cu normala (n-n).

Se consideră în figura 4.4. un punct material A, obligat să rămână pe o suprafață aspră (Σ) a cărei ecuație este: f (x, y, z)=0. Asupra lui acționează un sistem de forțe a căror rezultantă este: $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ într-un sistem de referință cartezian. Vectorul grad f, normal la suprafața (Σ) are expresia:

$$\text{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Condiția (4.16) se poate transforma pentru a obține o formă analitică mai avantajoasă a condiției de echilibru.

Folosind produsul scalar al celor doi vectori, avem:

$\vec{R} \cdot \text{gradf} = R \cdot |\text{gradf}| \cdot \cos\alpha$, de unde:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{R}\cdot \text{gradf}}{R\cdot|\text{gradf}|} = \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \qquad (4.17)$$

Exprimâmd şi unghiul de frecare φ în funcţie de μ avem:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (4.18)$$

În final, condiţia de echilibru (4.16) se scrie sub forma:

$$\frac{\left|X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (4.19)$$

Condiţia (4.19) împreună cu ecuaţia suprafeţei f (x, y, z)=0 definesc regiunea de echilibru a punctului.

4.3.3. Echilibrul punctului material pe o curbă aspră

În cazul echilibrului punctului material pe o curbă aspră, definim drept con $\vec{R}^P$ complementar de frecare (fig. 4.5.) locul geometric al poziţiilor limită ale suportului reacţiunii $\vec{R}^P$ ce face cu tangenta la o curbă unghiul $\left(90^\circ - \varphi\right)$ şi având ca axă, tangenta la curbă.

În acest caz, condiţia necesară şi suficientă pentru ca punctul material să fie în echilibru pe o curbă aspră, este ca rezultanta forţelor exterioare $\vec{R}$ ce acţionează asupra punctului să fie exterioară conului complementar de frecare şi la limită pe suprafaţa conului.

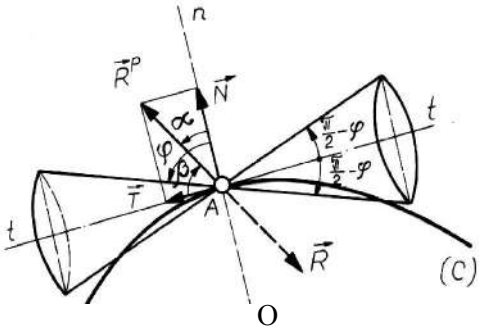


Fig. 4.5.

Condiția geometrică $\alpha \le \varphi$ se exprimă:

$$\beta \ge 90^\circ - \varphi \text{ sau } \cos\beta \le \sin\varphi \tag{4.20}$$

Urmând același raționament ca în paragraful precedent, unghiul β se poate calcula din produsul scalar, $\vec{R}\vec{\tau} = R \cdot \cos\beta$ sau:

$$\cos\beta = \frac{\vec{R}\cdot\vec{\tau}}{R}, \tag{4.21}$$

unde $\vec{\tau}$ este versorul tangentei la curbă, care are expresia:

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \tag{4.22}$$

în cazul când curba (C) are ecuațiile parametrice:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \tag{4.23}$$

știind că: $\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$,

rezultă condiția analitică de echilibru a punctului material:

$$\frac{\left|X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \le \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{4.24}$$

Relația (4.24) împreună cu ecuațiile curbei definesc intervalul de echilibru pe curba aspră.

4.4. PROBLEME REZOLVATE

1. O bilă M, de greutate $\vec{G}$, este legată de punctul fix A cu firul AM de lungime l și se află în echilibru pe suprafața unei sfere de rază R cu

centrul în O (fig. 4.6). Dreapta OA fiind verticală şi distanța AB=d, să se afle efortul din fir şi reacțiunea normală a sferei.

Punctul M se află în echilibru static determinat. Se înlocuiesc legăturile cu reacțiunile $\vec{S}$ şi $\vec{N}$.

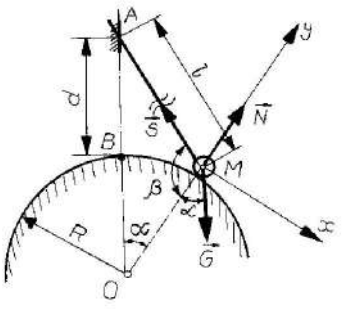


Fig. 4.6

Alegând ca axe, tangenta şi normala la cercul de rază R, ecuațiile de echilibru se scriu astfel:

$$\sum X_i = 0;\ G\sin\alpha - S\sin\beta = 0,$$

$$\sum Y_i = 0;\ -G\cos\alpha + S\cos\beta = 0.$$

Ținând seama de teorema sinusurilor în triunghiul OAM, din prima ecuație rezultă:

$$S = G\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = G\frac{l}{R+d}$$

Din ecuația a doua rezultă reacțiunea normală:

$$N = G\cos\alpha + S\cos\beta = G\left(\cos\alpha + \frac{l}{R+d}\cos\beta\right) =$$

$$= \frac{G}{R+d}\left[(R+d)\cos\alpha + l\cos\beta\right]$$

Deci:

$$N = \frac{GR}{R+d}, \text{deoarece} (R+d)\cos\alpha - l\cos$$

2. Un punct material M, de greutate $\vec{G}$ poate aluneca fără frecare pe o bară care are forma unei parabole cu axa verticală Oy (fig. 4.7). Punctul material

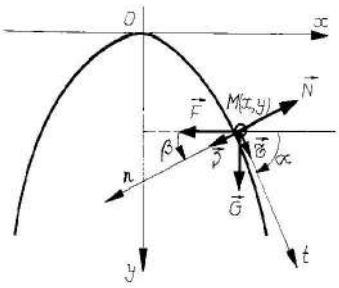


Fig. 4.7

este atras de axa parabolei cu forţa $\vec{F}$ proporţională cu distanţa la această axă. Să se determine poziţia de echilibru a punctului material.

Rezolvare. Se consideră parabola de ecuaţie $y = px^2$. Notând cu a şi b unghiurile formate de tangenta şi normala la parabolă cu axa Ox, avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = 2px; \quad \sin\beta = \cos(90^\circ - \beta) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4p^2x^2}}$$

Punând $\vec{F} = -Kx\vec{i}$, ecuaţiile de echilibru în sistemul xOy, sunt:

$$\sum X_i = 0; -Kx + N\frac{2px}{\sqrt{1+4p^2x^2}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; G - N\frac{1}{\sqrt{1+4p^2x^2}} = 0.$$

Din prima ecuaţie rezultă $x_1 = 0$, care defineşte una din poziţiile de echilibru. Pentru această poziţie de echilibru G=N.

Eliminând reacţiunea N din cele două ecuaţii de echilibru se găseşte că independent de valorile lui x trebuie îndeplinită condiţia G=K/2p, când punctul material rămâne în echilibru în orice punct al parabolei.

Problema se poate rezolva utilizând relaţia (4.12) în ipoteza că punctul material M este acţionat de forţele date.

$\vec{G} = +G\vec{j}$ şi $\vec{F} = -Kx\vec{i}$,

Punctul este rezemat pe parabola de ecuaţii:

$f(x,y,z) = y^2 - 2px = 0$ şi $g(x,y,z) = z = 0$.

Condiţia de echilibru (4.12) în acest caz devine:

$$\begin{vmatrix} -Kx & -2px & 0 \\ G & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } G = \frac{K}{2p}.$$

3. Un punct material M, rezemat pe suprafaţa exterioară a unei

sfere aspre (fig. 4.8) de rază R=3m, este atras de un punct interior P, situat la distanța OP=2m, cu o forță $\vec{F}$ proporțională cu distanța dintre cele două puncte, factor de proporționalitate fiind l.

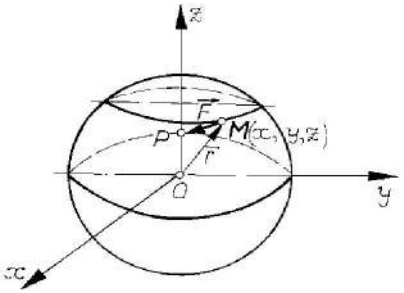


Fig. 4.8

Să se determine pozițiile de echilibru ale punctului material dacă coeficientul de frecare este $\mu = 1/\sqrt{8}$.

Rezolvare: Condiția de echilibru a punctului pe sferă este dată de relația (4.19).

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

iar $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$

Cunoscând coordonatele punctului P (0, 0, 2) şi ale lui M (x, y, z), rezultă:

$$\vec{F} = \lambda \cdot MP = -\lambda x\vec{i} - \lambda y\vec{j} + \lambda(2-z)\vec{k}, \text{ de unde:}$$

$$X = -\lambda x; Y = -\lambda y; Z = \lambda(2-z).$$

Condiția de echilibru devine:

$$\frac{\left|-2\lambda x^2 - 2\lambda y^2 - 2\lambda z^2 + 4z\lambda\right|}{\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + \lambda^2(2-z)^2} \cdot \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

ținând seama că $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ şi $\mu = 1/\sqrt{8}$, rezultă:

$$\frac{\left|-9 + 2z\right|}{3 \cdot \sqrt{13 - 4z}} \geq \sqrt{\frac{8}{9}} \text{ de unde } z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{96}}{4}$$

Deoarece $|z| \leq 3$, obținem $2{,}89 \leq z \leq 3$, condiția îndeplinită de o calotă sferică situată deasupra planului de cotă $z_1 = 2{,}89$ şi $-3 \leq z \leq -1{,}89$.

condiție îndeplinită de o calotă sferică (cu rezemare pe interiorul sferei) situată sub planul de cotă $z_2 = -1{,}89$.

4. Să se determine pozițiile limită de echilibru ale unui punct material de greutate G pe un cerc aflat în plan vertical, coeficientul de frecare de alunecare fiind m (fig. 4.9).

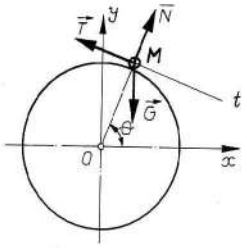


Fig. 4.9

Rezolvare. Ecuațiile parametrice ale cercului sunt: x = R cos q; y = R sin q; z = 0, unde q este unghiul făcut de axa Ox cu raza vectoare OM.

Condiția de echilibru a punctului pe cerc este dată de relația (4.24). În acest caz: X = 0; Y = -G; Z = 0;

$$\frac{dx}{d\theta} = -R\sin\theta; \frac{dy}{d\theta} = R\cos\theta.$$

Introducând aceste rezultate în relația (4.24) rezultă:

$$\frac{\left|-GR\cos\theta\right|}{GR} \le \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \text{ sau } \left|\cos\theta\right| \le \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

deoarece interesează valorile lui q < p / 2. Echilibrul este posibil pe două arce de cerc (sus sau jos) cu atât mai mari cu cât coeficientul de frecare m este mai mare.

Observație. Spre deosebire de echilibrul pe suprafețe sau curbe netede, unde există porțiuni unice de echilibru, pe suprafețele şi curbele aspre, echilibrul este posibil într-o infinitate de poziții, cuprinse într-un domeniu cu atât mai întins cu cât legătura este mai aspră.

4.5. PROBLEME PROPUSE

1. Un semifabricat sub forma unei plăci pătrate de greutate G =18 kN, este ridicat cu o macara prin intermediul unui cârlig şi a trei cabluri fixate în punctele A,B şi D. Să se determine eforturile din cele trei cabluri (fig. 4.10).

R. $S_A = 9{,}85$ kN; $S_B = S_D = 5{,}4$ kN.

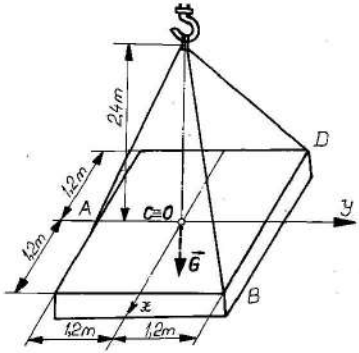


Fig. 4.10

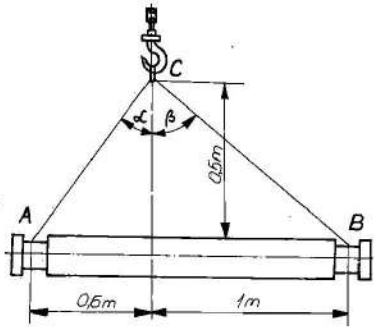


Fig. 4.11

2. Axul forjat al unei maşini, de greutate 12 kN se transportă cu ajutorul unei macarale, fiind susţinut de un cablu fixat în A şi B (fig. 4.11). Să se determine eforturile în cablurile de susţinere.

R. $S_A = 11{,}75$ kN; $S_B = 10$ kN.

3. La instalaţia de forat găuri pentru explorările geologice, pentru ridicarea prăjinilor de foraj se utilizează trepiedul ABCD şi troliul E. Să se determine eforturile în picioarele trepiedului la ridicarea uniformă a sarcinii G=3 kN, dacă unghiul format de picioarele trepiedului şi planul orizontal sunt egale cu a = 60^O. Unghiul format de cablul DE şi orizontală este de asemenea a (fig. 4.12).

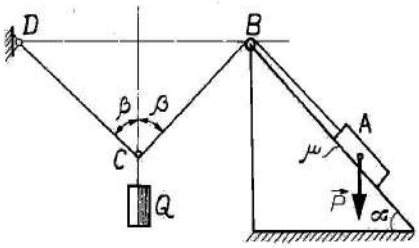


Fig. 4.12

R. $S_A = S_B = 3{,}15$ kN; $S_C = 0{,}15$ kN.

4. Semifabricatul de greutate Q este susţinut de firul ABCD, ancorat în D şi trecut înB peste o rolă fără frecare. De capătul A al firului este legată greutatea P care se poate deplasa pe un plan înclinat cu unghiul a = 45^O faţă de orizontală şi care este caracterizat de coeficientul de frecare m (fig. 4.13). Să se determine limitele între care poate să varieze unghiul

b pentru echilibru.

R. $\frac{Q}{\sqrt{2}P(1+\mu)} \le \cos\beta \le \frac{Q}{\sqrt{2}P(1-\mu)}$

5. Pentru a se putea turna fontă topită în forme, o cală de turnare de greutate $\vec{G}$, manevrată de o macara, se înclină cu unghiul a față de verticală (fig. 4.14). Să se determine forța orizontală $\vec{F}$ necesară pentru a înclina cala de turnare şi efortul $\vec{S}$ din cablul de susținere.

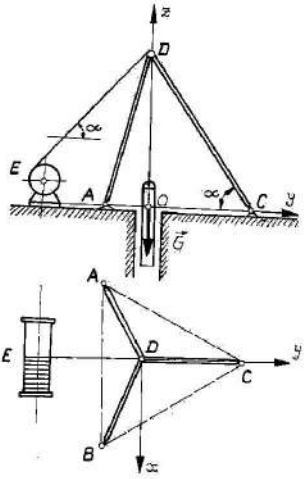


Fig. 4.13

R. F = S sin a; $S = \frac{G}{\cos\alpha}$.

6. Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct material M de greutate G rezemat pe o sferă aspră de rază R, coeficientul de frecare fiind μ.

R. $|z| \ge \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

7. Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct material de greutate G rezemat cu frecare pe paraboloidul de revoluție dat de ecuația:, coefcientul de frecare fiind m.

R. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 2z = 0$.

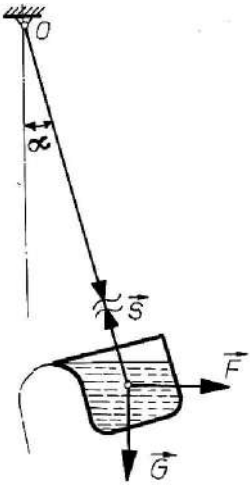


Fig. 4.14

5.

STATICA SOLIDULUI RIGID

5.1. Echilibrul forțelor ce acționează asupra rigidului liber 95
5.2. Echilibrul rigidului supus la legături ideale 96
5.2.1. Legăturile mecanice ale rigidului. 96
5.3. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare..... 103
5.3.1. Rigidul rezemat cu frecare. 103
5.3.2. Frecarea de alunecare. 105
5.3.3. Frecarea de rostogolire. 105
5.3.4. Frecarea de pivotare în cazul lagărului axial. 107
5.3.5. Frecarea în articulații sau lagărul radial cu joc. 109

5.3.6. Frecarea firelor pe suprafețe cilindrice. 111
5.3.7. Frecarea în scripeți. 113
5.4. Probleme rezolvate 116
5.5. Probleme propuse 124

5

STATICA SOLIDULUI RIGID

5.1. ECHILIBRUL FORȚELOR CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA RIGIDULUI LIBER

Rigidul liber este un corp căruia nu i se impun restricții geometrice şi care ocupă orice poziție în spațiu, poziția lui depinzând exlusiv de sistemul de forțe ce acționează asupra lui. Rigidul liber în spațiu are şase grade de libertate corespunzătoare celor şase mişcări posibile: trei translații şi trei rotații, de-a lungul şi respectiv, în jurul celor trei axe ortogonale. Dacă sistemul de forțe care acționează asupra corpului este în echilibru, atunci corpul se află în echilibru. Stările de echilibru ale unui corp rigid sunt repausul şi mişcarea de translație rectilinie şi uniformă față de un sistem de referință inerțial.

Condiția necesară şi suficientă pentru ca rigidul liber să fie în echilibru, este ca sistemul de forțe care-l acționează să fie echivalent cu zero. Condiția de echivalență cu zero a unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra rigidului, este ca torsorul de reducere să fie nul în orice punct din spatiu. Această condiție se exprimă prin ecuațiile vectoriale:

$$\vec{R} = 0 \text{ şi } \vec{M}_O = 0. \tag{5.1}$$

În cazul general, cele două ecuații vectoriale de echilibru (5.1) sunt echivalente cu şase ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0; \\ &\sum M_{xi} = 0; \sum M_{yi} = 0; \sum M_{zi} = 0; \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dacă asupra rigidului acționează sisteme de forțe particulare, unele dintre ecuațiile (5.2) sunt satisfăcute de la sine prin însăşi natura sistemului de forțe, adică devin identități.

5.2. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI IDEALE

Corpul solid rigid este supus la legături, atunci când i se impun anumite restricţii geometrice, adică unul sau mai multe puncte ale acestuia sunt obligate să păstreze permanent contact cu puncte fixe din spaţiu. Legăturile la care este supus rigidul sunt mai complexe decât legăturile la care este supus punctul material. Ca şi la punctul material, studiul echilibrului rigidului supus la legături se face aplicând ***AXIOMA LEGĂTURILOR*** potrivit căreia, legătura îndepărtată se înlocuieşte cu reacţiuni-forţe şi momente de reacţiune-care exprimă efectul mecanic al legăturii. Prin această operaţie, rigidul devine liber şi echilibrul său se studiază cu ecuaţiile stabilite pentru rigidul liber, asupra lui acţionând forţele şi momentele exterioare date şi forţele şi momentele de reacţiune pasive, din legăturile îndepărtate.

Condiţiile de echilibru ale forţelor, active şi pasive, ce acţionează asupra rigidului supus la legături se exprimă prin ecuaţiile:

$$\vec{R}^{a} + \vec{R}^{p} = 0; \vec{M}_O^{a} + \vec{M}_O^{p} = 0. \qquad (5.3)$$

Cu alte cuvinte, torsorul forţelor active date, calculat într-un punct oarecare O,trebuie să fie egal şi de semn contrar cu torsorul forţelor pasive din legături, calculat în acelaşi pol.

În cazul general, cele două ecuaţii vectoriale de echilibru (5.3) proiectate pe axele unui sistem cartezian de referinţă, conduc la şase ecuaţii scalare de echilibru.

5.2.1. Legăturile mecanice ale rigidului

Legăturile la care poate fi supus un corp rigid sunt de patru tipuri: reazemul simplu, articulaţie sferică sau cilindrică, încastrarea spaţială sau plană şi legătura cu fir sau bară rigidă.

În studiul legăturilor mecanice ale rigidului se urmăresc două aspecte:*aspectul geometric*, care se referă la numărul gradelor de libertate anulate de legătura respectivă, şi *aspectul mecanic* referitor la

elementele mecanice cu care se înlocuieşte legătura.

a) REAZEMUL SIMPLU SAU REZEMAREA este legătura prin care un punct al rigidului este obligat să rămână în permanent contact cu o suprafaţă sau o curbă fixă din spaţiu. În figura 5.1 se consideră un corp rigid (C_1) rezemat pe suprafaţa corpului (C_2) asupra lui (C_1) acţionând un sistem de forţe $\vec{F}_i$ (i = 1,2...n). Deplasarea pe direcţia n-n, normală la suprafaţă, este împiedicată într-un sens. Reazemul simplu suprimă un singur grad de libertate şi lasă libere cinci grade de libertate şi anume: deplasările liniare după cele două axe concurente din planul tangent $[\pi]$ la suprafaţa de rezemare în punctul O şi rotirile după cele trei axe. Pentru ca acest rigid să fie în echilibru, forţele exterioare trebuie să se reducă în punctul de rezemare, la o rezultantă unică orientată după normala la suprafaţa de reazem. Rezultă că un reazem simplu se înlocuieşte cu o reacţiune normală $\vec{N}$, dirijată după normala comună în punctul de contact. În cazul legăturii unilaterale, sensul reacţiunii coincide cu sensul în care corpul poate părăsi legătura.

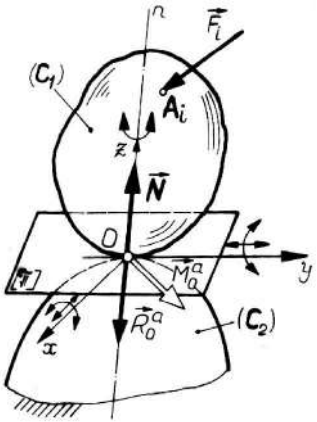


Fig. 5.1

Ecuaţiile vectoriale de echilibru ale corpului (C_1) rezemat sunt în acest caz:

$$\vec{R}^a + \vec{N} = 0; \vec{M}_O^a = 0. \qquad (5.4)$$

În figurile 5.2,a, b, c,d,e,f s-au reprezentat câteva tipuri de rezemări, iar în figura 5.2,g,h, k se ilustrează modul convenţional de reprezentare a unui reazem simplu.

În calcule, rezemarea introduce o singură necunoscută scalară, mărimea reacţiunii normale, ce se determină din ecuaţiile scalare de echilibru. Legătura poate fi unilaterală sau bilaterală, după cum rigidul poate sau nu părăsi legătura într-un sens al normalei n-n.

b) ARTICULAŢIA este legătura care constrânge rigidul să rămână

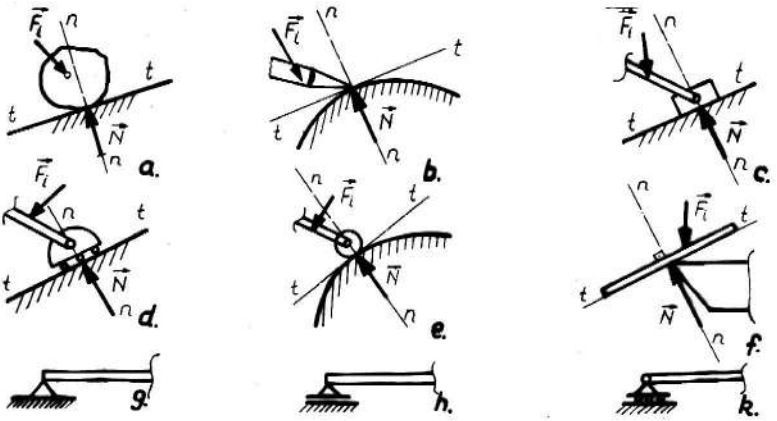


Fig. 5.2

cu un punct al său în permanent contact cu un punct fix din spațiu. Dacă rigidul este acționat de un sistem de forțe în spațiu, articulația este sferică sau spațială. Dacă forțele ce acționează asupra rigidului sunt coplanare, articulația poate fi considerată cilindrică sau plană. Denumirile celor două tipuri de articulații sunt date de forma suprafeței de contact (v. fig.5.3,b şi fig.5.4,b).

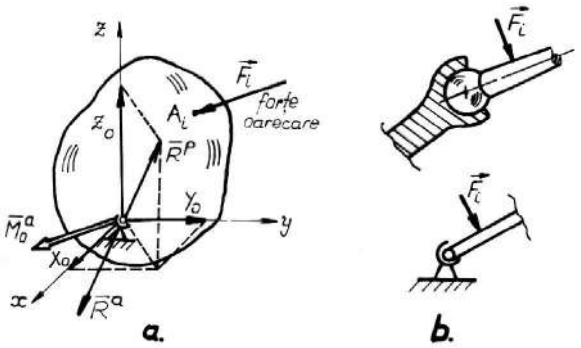


Fig. 5.3

În figura 5.3,a se consideră un rigid acționat de un sistem de forțe oarecare, în spațiu: $\vec{F}_i$ (i=1, 2,..., n). Rigidul are o articulație sferică în O.

Această legătură anulează rigidului trei grade de libertate, translațiile după cele trei axe ortogonale în O_1 având posibilitatea de a efectua trei rotații în jurul aceloraşi axe. Deci, rigidul având un punct fix dispune de trei

grade de libertate. Din punct de vedere mecanic, o articulație sferică se înlocuieşte cu o forță de reacțiune $\vec{R}^p$, având mărimea şi direcția necunoscute. Într-o problemă de statică, ea introduce trei necunoscute scalare: X_O, Y_O, Z_O proiecțiile reacțiunii pe cele trei direcții ortogonale.

Ecuațiile vectoriale de echilibru ale solidului rigid din figura 5.3,a sunt:

$$\vec{R}^a + \vec{R}^p = 0; \vec{M}_O^a = 0. \qquad (5.5)$$

În figura 5.3,b se reprezintă simbolul articulației sferice.

Dacă unui solid rigid acționat de un sistem de forțe coplanare i se imobilizează un punct din planul forțelor, se spune că rigidul are în acel punct o articulație cilindrică (fig.5.4,a). În aceste condiții o articulație cilindrică suprimă două din cele trei grade de libertate ale rigidului. Acesta va dispune de un singur grad de libertate, iar poziția lui este definită printr-un singur parametru scalar.

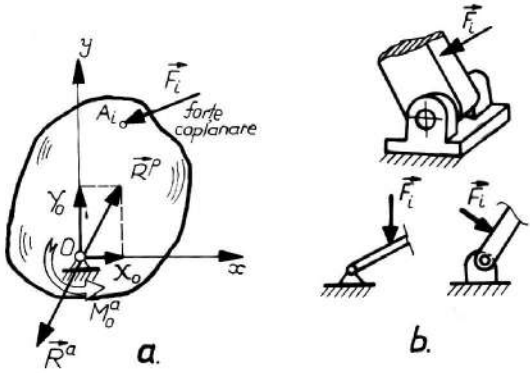


Fig. 5.4

O articulație cilindrică poate fi înlocuită cu o reacțiune $\vec{R}^p$, având suportul situat în planul forțelor, mărimea şi direcția necunoscute. Astfel, o articulație cilindrică introduce într-o problemă de statică două necunoscute scalare: X_O şi Y_O, proiecțiile reacțiunii $\vec{R}^p$ pe două direcții ortogonale din planul forțelor.

Pentru rigidul reprezentat în figura 5.4,a condițiile de echilibru se pot exprima prin ecuațiile vectoriale (5.9). În figura 5.4,b sunt redate simbolurile articulației cilindrice.

c) ÎNCASTRAREA este legătura prin care un corp este fixat rigid (înțepenit) într-un alt corp, în aşa fel încât nu-i este permisă nici o deplasare.

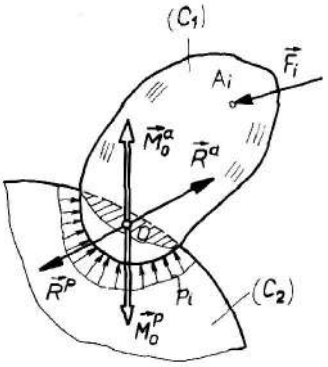


Fig. 5.5

Încastrarea suprimă toate gradele de libertate corpului al cărui echilibru îl studiem. Acest corp va fi întodeauna în echilibru, oricare ar fi sistemul de forţe exterioare date care acţionează asupra sa.

În figura 5.5 se consideră corpul (C_1) acţionat de un sistem de forţe oarecare: $\vec{F}_i$ (i=1,2...n) încastrat în corpul (C_2). Sistemul de forţe date $\vec{F}_i$ se reduce în polul O (centrul de greutate al suprafeţei de intersecţie a celor două corpuri) la un torsor al forţelor active: $\tau_O^a\left(\vec{R}^a, \vec{M}_O^a\right)$. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, în zona de contact dintre cele două corpuri apar forţe de reacţiune locale $\vec{p}_i$, după o distribuţie oarecare. Aceste forţe se reduc în acelaşi pol O la un torsor al forţelor pasive: $\tau_O^p\left(\vec{R}^p, \vec{M}_O^p\right)$. Corpul (C_1) fiind în echilibru, încastrarea anulând toate gradele de libertate,torsorul forţelor pasive, de legătură este egal şi de semn contrar cu torsorul forţelor active, date. Condiţiile de echilibru, sub forma ecuaţiilor vectoriale se exprimă prin relaţiile (5.7). Cele două ecuaţii proiectate pe axele unui sistem cartezian de referinţă, conduc la şase ecuaţii scalare de echilibru în care apar şase necunoscute cu care se înlocuieşte încastrarea spaţială: trei forţe de reacţiune X_O, Y_O, Z_O şi trei momente de reacţiune M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}, corespunzătoare celor trei translaţii şi celor trei rotaţii anulate.

Aceste forţe şi momente de reacţiune reprezintă proiecţiile pe axele sistemului de referinţă ales, a elementelor torsorului forţelor pasive de reacţiune.

În figura 5.6,a se reprezintă o bară cotită încastrată spaţial, asupra ei acţionând un sistem de forţe oarecare: $\vec{F}_i$ şi elementele meca-nice cu care se înlocuieşte această încastrare: X_O, Y_O, Z_O, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}.

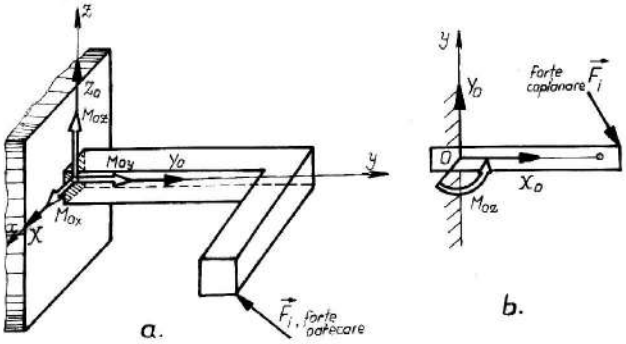


Fig. 5.6

Dacă sistemul de forțe $\vec{F}_i$ (i=1, 2,..., n) ce acționează asupra corpului (C1) este un sistem de forțe coplanare, atunci încastrarea se poate considera plană, introducând în calcule doar trei necunoscute scalare: două forțe de reacțiune X_O, Y_O și un moment de reacțiune M_{Oz}, perpendicular pe planul forțelor. În figura 5.6,b s-a reprezentat o bară încastrată plan, asupra ei acționând forțele coplanare: $\vec{F}_i$, situate în planul Oxy.

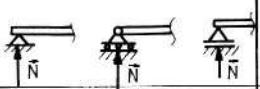
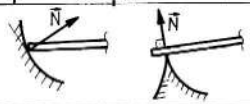
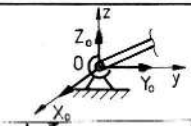
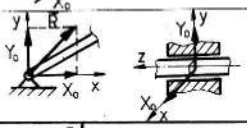
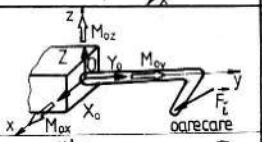
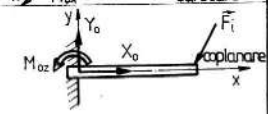
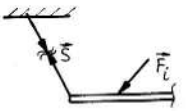
d) LEGĂTURA CU FIR SAU BARĂ RIGIDĂ este echivalentă cu o rezemare, unilaterală, respectiv, bilaterală în cazul unei bare pe o suprafață sferică, de rază egală cu lungimea firului sau a barei. Ca și în cazul punctului material, firul se înlocuiește cu o forță de reacțiune în lungul firului, considerat secționat, numită tensiune în fir sau efort din fir. Sensul este astfel ales încât să întindă porțiunea de fir legată de rigid. În mecanică firul se consideră perfect flexibil și inextensibil, deci nu poate fi solicitat decât la întindere. Un rigid poate fi suspendat în spațiu prin maxim șase fire, iar în plan prin trei.

Legătura cu bară rigidă este o legătură bilaterală, prin ea se transmit eforturi de tracțiune cât și de compresiune. Legătura cu bară se înlocuiește cu o forță de reacțiune de-a lungul barei considerată secționată, numit efort din bară sau tensiune din bară, notată cu $\vec{S}$ sau $\vec{N}$

În tabelul 5.1 sunt prezentate tipurile de legături ale rigidului analizate anterior, simbolurile prin care se pot reprezenta și forțele, respectiv momentele de reacțiune cu care, din punct de vedere mecanic, se

Tabelul 5.1

LEGATURILE MECANICE SIMPLE ALE RIGIDULUI

Denumirea legăturii		Simbolul legăturii	Reacţiuni	Numărul de necunoscute scalare
REZEMAREA	Pe suprafaţă plană		Reacţiunea $\vec{N}$, normală la suprafaţa de sprijin*.	1
	Pe suprafaţă curbă		Reacţiunea $\vec{N}$, perpendiculară pe tangenta la suprafaţa de sprijin.	1
ARTICULAŢIA	Sferică		Reacţiunea $\vec{R}^P = X_o\vec{i} + Y_o\vec{j} + Z_o\vec{k}$ cu cele trei componente scalare: X_o, Y_o, Z_o.	3
	Cilindrică		Reacţiunea $\vec{R}^P = X_o\vec{i} + Y_o\vec{j}$, perpendiculară pe axa de rotaţie	2
ÎNCASTRAREA	Spaţială		Torsorul forţelor pasive $\begin{cases}\vec{R}^P = X_o\vec{i} + Y_o\vec{j} + Z_o\vec{k}; \\ \vec{M}_O^P = M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}\end{cases}$ cu cele 6 componente scalare ca necunoscute	6
	Plană		Torsorul forţelor pasive $\begin{cases}\vec{R}^P = X_o\vec{i} + Y_o\vec{j} \\ \vec{M}_O^P = M_{oz}\vec{k}\end{cases}$ cu cele 3 componente scalare ca necunoscute	3
LEGĂTURA CU FIR SAU BARĂ RIGIDĂ			Efortul din fir sau din bara rigidă notată cu $\vec{S}$, $\vec{T}$ sau $\vec{N}$, are direcţia firului sau barei.	1

*Suprafaţa de sprijin este planul tangent comun al celor două curpuri în contact.

înlocuiesc aceste legături.

Pentru calculul reacţiunilor din legăturile mecanice ale rigidului se parcurg următoarele etape:

a) se identifică legăturile mecanice ale rigidului;

b) se îndepărtează legăturile mecanice şi se înlocuiesc cu reacţiunile corespunzătoare;

c) se alege un sistem de referinţă şi se scriu ecuaţiile scalare de echilibru;

d) se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinut, determinându-se reacţiunile şi condiţiile de echilibru dacă este cazul.

5.3. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

5.3.1. Rigidul rezemat cu frecare

În paragrafele precedente s-a studiat echilibrul rigidului supus la legături ideale, fără a se lua în considerare frecarea. Experienţa arată că orice mişcare sau tendinţă de mişcare a unui corp faţă de alt corp cu care vine în contact, este însoţită de o serie de rezistenţe determinate de natura fizică a zonelor de contact aparţinând celor două corpuri. Aceste rezistenţe au primit denumirea generală de "frecări". Explicaţia fizică constă în faptul că în realitate corpurile sunt deformabile şi aspre, iar contactul dintre ele nu este într-un singur punct, ci pe o suprafaţă pe care apar forţe de legătură $\vec{p}_i$, care au o distribuţie greu de stabilit. Frecarea este pusă în evidenţă în acele legături ale rigidului la care este permisă deplasarea relativă a celor două corpuri în contact.

În fig. 5.7 se consideră un corp solid rigid (C_1) rezemat pe corpul (C_2). Asupra corpului (C_1) acţionează un sistem de forţe $\vec{F}_i\,(i=1,2,..,n)$, în punctele A_i. Corpurile fiind deformabile, contactul dintre ele se face pe o suprafaţă. În zona de contact dintre corpuri se dezvoltă forţe de reacţiune $\vec{p}_i$. Acestea se reduc în polul teoretic de contact O la un torsor al

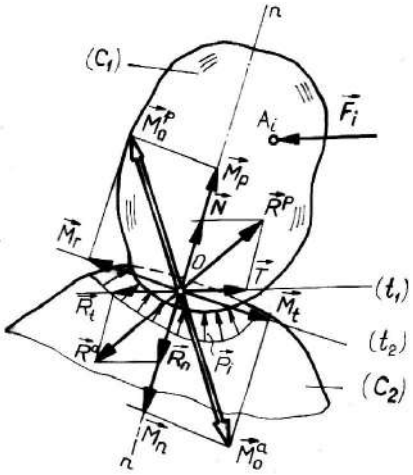


Fig. 5.7

forţelor de reacţiune $\tau_O^p\left(\vec{R}^p, \vec{M}_O^p\right)$ iar forţele active date $\vec{F}_i$, se reduc în acelaşi pol la un torsor al forţelor de acţiune $\tau_O^a\left(\vec{R}^a, \vec{M}_O^a\right)$. Condiţiile de echilibru ale corpului (C_1) sub forma ecuaţiilor vectoriale sunt:

$$\vec{R}^a + \vec{R}^p = 0; \vec{M}_O^a + \vec{M}_O^p = 0. \tag{5.6}$$

Pentru a studia forţele şi momentele de reacţiune se descompune fiecare element al torsorului forţelor active în câte două componente: una normală comună n-n la planul tangent şi alta după tangenta (t_1), respectiv (t_2).

Cu notaţiile din fig. 5.11 se pot scrie relaţiile:

$$\vec{R}^a = \vec{R}_t + \vec{R}_n \text{ şi } \vec{M}_O^a = \vec{M}_t + \vec{M}_n, \tag{5.7}$$

în care cele patru componente sunt:

$\vec{R}_t$ -componenta care tinde să imprime corpului (C_1) o mişcare de translaţie, numită alunecare, peste corpul (C_2), de-a lungul tangentei comune (t_1) din planul tangent. Acestei tendinţe de mişcare i se opune forţa de frecare de alunecare notată cu $\vec{T}$.

$\vec{R}_n$ -componenta după normala n-n, tinde să determine pătrunderea corpului (C_1) în corpul (C_2). Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, corpul (C_2) răspunde cu o forţă egală şi direct opusă $\vec{N}$, numită reacţiune normală.

$\vec{M}_t$ -componenta care tinde să rotească corpul (C_1) în jurul tangentei comune (t_2). Acestei mişcări, denumită mişcare de rostogolire, i se opune momentul (cuplul) de frecare de rostogolire, notat cu $\vec{M}_r$.

$\vec{M}_n$ -componenta care tinde să rostogolească corpul (C_1) în jurul normalei comune n-n. Acestei mişcări, denumită mişcare de pivotare, i

se opune momentul (cuplul) de frecare de pivotare $\vec{M}_p$.

Ca urmare a celor prezentate mai sus, torsorul forţelor pasive, de reacţiune, va avea următoarele elemente:

$$\vec{R}^p = \vec{T} + \vec{N} \text{ şi } \vec{M}_O^p = \vec{M}_r + \vec{M}_p, \tag{5.8}$$

Pornind de la acest caz general, se pot studia separat, cazurile particulare întâlnite în practică, şi anume: frecarea de alunecare, frecarea de rostogolire, frecarea de pivotare etc.

5.3.2. Frecarea de alunecare

Forţa de frecare de alunecare, proprietăţile şi legile ei, au fost definite în capitolul consacrat punctului material supus la legături cu frecare (paragraful 4.3). În cazul problemelor de echilibru ale rigidului supus la legături cu frecare, rezolvarea este mai dificilă decât în cazul punctului material, deoarece tendinţa de mişcare a unui corp este mai greu de determinat şi în consecinţă, sunt mai greu de determinat direcţiile şi sensurile forţelor de frecare.

Rezolvarea unei probleme de echilibru a unui rigid supus la legături cu frecare se efectuează,în cazul frecării de alunecare, asociind ecuaţiile de echilibru, inegalităţile de tipul: $T_i \le \mu N_i$ unde i=1,2,...,n, reprezintă punctele de rezemare.

Dacă se consideră cazurile de echilibru limită, inegalităţile se transformă în egalităţi şi rezolvarea sistemului se simplifică.

5.3.3. Frecarea de rostogolire

După cum s-a arătat, frecarea de rostogolire, se manifestă prin apariţia unui cuplu de frecare la rostogolire, care se opune în anumite limite, tendinţei de rotire a corpului în jurul unei drepte din planul tangent lor, în punctul teoretic de rezemare.

Frecarea de rostogolire este întâlnită în practică la toate corpurile ce

se rostogolesc: roţile autovehiculelor, roţile de cale ferată, rolele şi bilele rulmenţilor etc.

Pentru a înţelege mai bine mecanismul apariţiei acestui tip de frecare, se consideră cazul concret al unei roţi trase de greutate $\vec{G}$ şi rază $\vec{R}$ (fig. 5.8) rezemată pe o suprafaţă aspră, acţionată de o forţă $\vec{F}$. Considerând corpurile nedeformabile, contactul dintre roată şi planul orizontal se face într-un singur punct A, în care apar: o reacţiune normală $\vec{N}$ şi o forţă de frecare (aderenţă) $\vec{T}$.

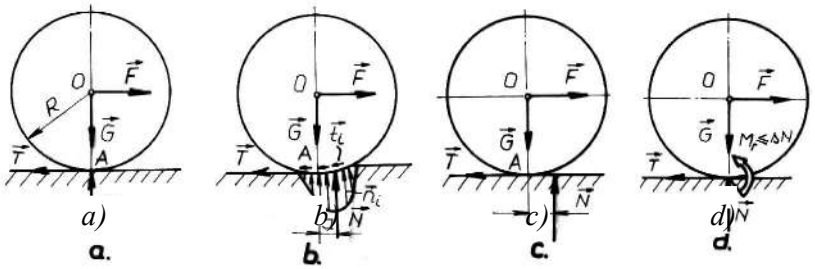


Fig. 5.8

Făcând o sumă de momente în polul A (-FR=0), constatăm că acest sistem de forţe nu este în echilibru, deşi experienţa arată că roata poate rămâne în repaus dacă mărimea forţei $\vec{F}$ nu depăşeşte o anumită limită.

Pentru explicarea acestei neconcordanţe între teorie şi practică, va trebui să ţinem seama de faptul că, în realitate, corpurile sunt deformabile, iar contactul dintre ele are loc pe o mică suprafaţă. În fiecare punct al acestei suprafeţe de contact apare câte o reacţiune normală $\vec{n}_i$ şi o forţă de frecare tangenţială $\vec{t}_i$ (fig.5.8,b). Dacă roata nu are tendinţă de rostogolire $\left(\vec{F}=0\right)$, reacţiunile normale $\vec{n}_i$ sunt distribuite după o elipsă, simetrică faţă de normala ce trece prin centrul roţii, iar forţele tangenţiale sunt nule.

Dacă roata are tendinţa să se rostogolească spre dreapta (v. fig.5.8.b), suprafaţa de contact şi distribuţia forţelor de reacţiune normale $\vec{n}_i$, devin asimetrice faţă de normala ce trece prin centrul roţii, deplasându-se în sensul în care roata are tendinţa de rostogolire.

Datorită acestui fapt reacțiunea totală normală $\vec{N}$ se deplasează față de punctul teoretic de contact, spre dreapta, cu distanța a. Rezultanta $\vec{T}$ a forțelor de frecare de alunecare $\vec{t}_i$ poate fi considerată, cu o foarte bună aproximație, că trece prin punctul teoretic A.

În cazul echilibrului la limită al roții, distanța "a" ia valoarea maximă egală cu "s". Se ajunge la situația din figura 5.8,c. Ecuația de momente în polul A, în acest caz este:

$$-FR - sN = 0 \tag{5.9}$$

Dacă reducerea forțelor normale, asimetric distribuite, se face în punctul teoretic de contact A,va trebui să introducem şi un moment numit moment de frecare la rostogolire, a cărui valoare, la limita echilibrului roții, este:

$$M_r = sN = RF_{max}$$

Pentru o poziție oarecare de echilibru, este necesar să fie satisfăcută condiția:

$$M_r \le sN \tag{5.10}$$

unde $s = a_{max}$, este coeficientul de frecare la rostogolire şi reprezintă distanța maximă cu care se deplasează, paralel cu el însuşi, suportul reacțiunii normale $\vec{N}$, față de punctul teoretic de contact.

Dacă reducerea forței $\vec{N}$ se face în punctul teoretic de contact se obține situația din figura 5.8,d.

Rezultă că, în afara ecuațiilor de echilibru, pentru ca un rigid să rămână în repaus, în fiecare reazem simplu al acestuia trebuie să fie satisfăcute următoarele condiții:

$$T \le \mu N \text{ şi } M_r \le sN. \tag{5.11}$$

5.3.4. Frecarea de pivotare în cazul lagărului axial

Un lagăr este axial dacă rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra fusului are direcție axială. Lagărul axial poate fi plan, conic sau sferic, în funcție de forma suprafeței de contact dintre fus (pivot) şi lagăr.

După o funcționare îndelungată a pivotului plan, suprafața circulară

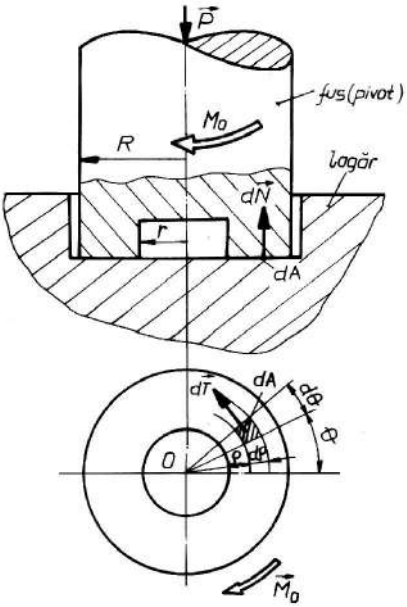


Fig. 5.9.

de contact dintre fus şi lagăr se uzează neuniform. La periferia fusului uzura este maximă, iar în centru minimă. Astfel, forţa P ce acţionează asupra fusului se concentrează pe o suprafaţă din ce în ce mai mică în jurul centrului, depăşind presiunea de contact admisibilă, fapt ce provoacă eliminarea uleiului şi griparea lagărului. Pentru a se preîntâmpina această situaţie nedorită, se execută în fus o degajare interioară cu o rază r, fusul în acest caz uzându-se aproximativ uniform (v. fig. 5.9). Suprafaţa de frecare devine o coroană circulară, iar presiunea dintre fus şi lagăr se poate considera aproximativ constantă:

$$p = \frac{P}{\pi\left(R^2 - r^2\right)}. \qquad (5.12)$$

unde R reprezintă raza pivotului, iar r raza degajării.

În continuare se va studia pivotul plan cu degajare, deteminându-se expresia coeficientului de frecare de pivotare şi a momentului de frecare de pivotare din acest lagăr.

Asupra pivotului acţionează rezultanta forţelor exterioare $\vec{P}$ si cuplul de moment $\vec{M}_0$. Coeficientul de frecare de alunecare se consideră constant egal cu μ, lagărul fiind uscat. Asupra unui element de arie dA acţionează o reacţiune normală elementară $d\vec{N}$ şi o forţă de frecare de alunecare elementară $d\vec{T}$, dirijată în sens invers sensului de rotaţie a fusului. Folosind coordonatele polare pentru detaşarea elementului de arie, rezultă: $dA = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$, iar $dN = pdA$. Forţa de frecare de alunecare elementară are expresia:

$$dT = \mu \cdot dN = \mu \cdot p \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta. \tag{5.13}$$

La limita echilibrului fusului, cuplul de moment M_O este egal cu momentul de frecare de pivotare M_p şi egal cu suma momentelor forţelor de frecare în raport cu axa pivotului:

$$M_p = M_O = \int \rho \cdot dT \tag{5.14}$$

în care înlocuind relaţiile (5.12) şi (5.13) rezultă:

$$M_p = \iint \rho \cdot p \cdot \mu \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = \mu \frac{P}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho^2 d\rho \tag{5.15}$$

În final, expresia momentului de frecare de pivotare, la limita echilibrului fusului este:

$$M_p = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} P = \nu \cdot P, \tag{5.16}$$

unde ν reprezintă coeficientul de frecare de pivotare din lagărul plan cu degajare.Pentru echilibrul fusului trebuie satisfăcută condiţia:

$$M_p \le \nu P \tag{5.17}$$

Frecarea de pivotare are multe aplicaţii în tehnică, ea apare la frânele disc, la ambreiajele cu disc sau con utilizate în construcţia de maşini etc.

5.3.5. Frecarea în articulaţii sau lagărul radial cu joc

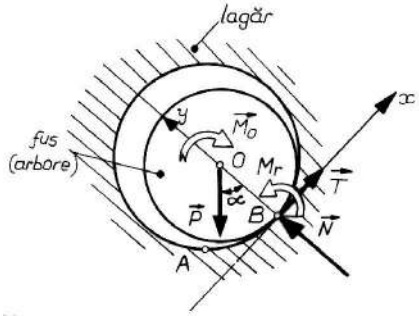


Fig. 5.10

Un lagăr este radial dacă rezultanta forţelor exterioare ce acţionează asupra fusului are direcţie radială. Lagărul radial este o articulaţie cilindrică între un fus şi lagăr, el este format dintr-un arbore care se poate roti sub acţiunea unui moment motor M_O, într-un alezaj de un diametru cu puţin mai mare (v. fig. 5.10).

În continuare se va studia lagărul radial cu joc în care apare frecare uscată (coulombiană), introducerea lubrefianţilor schimbând esenţial problema. Un studiu amănunţit al frecării în lagărele de alunecare cu lubrefiant se va face în cadrul cursului de Organe de maşini.Dacă cuplul forţelor exterioare M_O ce acţionează asupra fusului ar fi nul, punctul teoretic de contact dintre fus şi lagăr ar fi în A, pe direcţia rezultantei forţelor exterioare. Dacă însă asupra fusului acţionează un cuplu de moment M_O, el se comportă în lagăr ca o roată motoare pe un plan înclinat, având tendinţa de a urca.În acest caz punctul teoretic de contact se va deplasa din A în B (v. fig. 5.10).

Contactul dintre fus şi lagăr se face teoretic pe o linie dreaptă practic pe o mică suprafaţă în jurul liniei de contact. Considerând coeficientul de frecare de alunecare egal cu μ, coeficientul de frecare de rostogolire s şi raza fusului r, se vor determina în continuare mărimea momentului de frecare M_r din articulaţie şi expresia coeficientului global de frecare.

În punctul teoretic de contact B al fusului apar: o reacţiune normală $\vec{N}$, o forţă de frecare de alunecare $\vec{T}$ şi un moment de frecare de rostogolire M_r, având sensuri opuse tendinţei de alunecare şi, respectiv de rostogolire a fusului în interiorul lagărului. Fusul sub acţiunea momentului motor M_O se roteşe cu un unghi α, iar la limita echilibrului, conform principilui acţiunii şi reacţiunii, momentul de frecare din articulaţie M_f devine egal şi direct opus momentului motor.

Ecuaţiile scalare de echilibru ale fusului sunt (v. fig.5.10):

$$\begin{aligned} &\sum X_i = 0; T - P\sin\alpha = 0; \\ &\sum Y_i = 0; N - P\cos\alpha = 0; \\ &\sum M_{Bi} = 0; M_r + rP\sin\alpha - M_O = 0. \end{aligned} \qquad (5.18)$$

De unde rezultă:

$$T = P\sin\alpha; N = P\cos\alpha; M_O = M_r + rP\sin\alpha. \qquad (5.19)$$

Acestor relaţii li se adaugă cele două condiţii la limită:

$$T = \mu N \text{ şi } M_r = sN \qquad (5.20)$$

Din relaţiile (5.18) şi (5.19) se obţine:

$$P\sin\alpha = \mu \cdot P\cos\alpha \text{ sau } \operatorname{tg}\alpha = \mu. \tag{5.21}$$

Ştiind că:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \text{ şi } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \tag{5.22}$$

Rezultă:

$$M_O = M_f = sP\cos\alpha + rP\sin\alpha = \frac{Ps}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{rP\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{5.23}$$

Deci:

$$M_f = \frac{\frac{s}{r}+\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} rP = \mu' rP,$$

unde μ' reprezintă coeficientul global de frecare din lagărul radial cu joc, care poate fi determinat şi pe cale experimentală.

Pentru articulaţii cilindrice: $P = \left|\vec{R}^p\right| = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}$,

Pentru articulaţii sferice: $P = \left|\vec{R}^p\right| = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}$, unde X_O, Y_O, Z_O reprezintă componentele scalare ale reacţiunii totale din articulaţie.

5.3.6. Frecarea firelor pe suprafaţe cilindrice

Un alt caz de frecare întâlnit în tehnică îl reprezintă frecarea firelor pe suprafeţe cilindrice. Această frecare apare atât în cazul când roata pe care este înfăşurat firul este fixă şi firul are tendinţă de mişcare, cât şi în cazul când firul este fix şi roata are tendinţă de mişcare (exemplu frânele cu bandă).

In studiul echilibrului acestor fire se face ipoteza că ele sunt flexibile, inextensibile şi de greutate neglijabilă. Dacă s-ar neglija frecarea dintre fir şi suprafaţa cilindrică fortele de la capetele firului ar fi egale. Luându-se în considerare frecarea dintre fir şi suprafaţa cilindrică prin intermediul coeficientului de frecare de alunecare μ, se pune problema

determinării unei relații între forțele de la capetele firului pentru ambele tendințe de mișcare.

În figura 5.11., a se consideră un fir trecut peste o suprafață cilindrică, contactul dintre fir și suprafața fixă făcându-se pe arcul AB, având unghiul la centru α. Firul este acționat la capete de forțele $\vec{F}$ și $\vec{Q}$

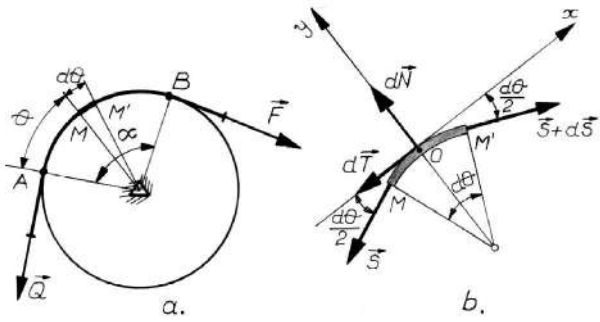


Fig. 5.11.

Pentru tendința de mișcare a firului de la A spre B, forța $\vec{F}$ numită și forță motoare trebuie să învingă forțele de frecare dintre fir și suprafața cilindrică, precum și forța rezistentă Q. Pentru a se stabili legătura dintre forțele $\vec{F}$ și $\vec{Q}$ se detașează un element din fir, MM′ de lungime elementară, având unghiul la centru dθ.

Asupra acestui fir acționează forțele reprezentate în figura 5.11,b: reacțiunea normală elementară dN, forța de frecare elementară dT în sens invers tendinței de mișcare a firului, efortul (S + dS) la capătul M' al firului și efortul S de la capătul opus M. Având în vedere dimensiunile foarte mici, elementare, ale arcului MM', forțele ce acționează asupra lui pot fi considerate concurente în O, mijlocul arcului. Ecuațiile scalare de echilibru ale forțelor ce acționează asupra acestei porțiuni din fir MM', în sistemul de referință cu originea în polul O, sunt:

$$\sum X_i = 0; -dT - S\cos\frac{d\theta}{2} + (S+dS)\cos\frac{d\theta}{2} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; dN - S\sin\frac{d\theta}{2} - (S+dS)\sin\frac{d\theta}{2} = 0. \qquad (5.24)$$

Unghiurile fiind foarte mici, elementare, în sistem se pot face următoarele aproximări:

$$\sin\frac{d\theta}{2}\cong\frac{d\theta}{2};\cos\frac{d\theta}{2}\cong 1;dS\cdot\frac{d\theta}{2}\cong 0. \tag{5.25}$$

Înlocuind relațiile (5.25) şi $dT = \mu dN$ în (5.24) rezultă;

$$dS = \mu dN \text{ şi } Sd\theta = dN. \tag{5.26}$$

Făcând raportul celor două relații (5.26) rezultă o ecuație diferențială cu variabile separabile care se poate integra uşor:

$$\int_Q^F \frac{dS}{S} = \int_0^\alpha \mu d\theta \text{ sau } \ln\frac{F}{Q} = \mu\alpha. \tag{5.27}$$

Deci $F = Q\cdot e^{\mu\alpha}$, numită **relația lui EULER** unde μ-este coeficientul de frecare de alunecare (aderență) dintre fir şi suprafața cilindrică, iar α-unghiul de înfăşurare al firului pe aceeaşi suprafață, în radiani.

Pentru cealaltă tendință de mişcare a firului, de la B la A, se obține în mod analog expresia:

$$F = Q\cdot e^{-\mu\alpha}. \tag{5.28}$$

Pentru ca firul să rămână în repaus pe suprafața cilindrică trebuie îndeplinite următoarele condiții:

$$Q\cdot e^{-\mu\alpha}\le P\le Q\cdot e^{\mu\alpha}. \tag{5.29}$$

Frecarea firelor (frecarea funiculară) are numeroase aplicații în tehnică: de exemplu la transmisiile prin curele şi la mecanismele de frânare cu bandă.

5.3.7. Frecarea în scripeți

Scripetele este un disc la periferia căruia este executat un şanț de ghidare pentru cablu, o frânghie sau un lanț, acesta reprezentând din punct de vedere teoretic firul. Scripetele poate să fie cu axă fixă de rotație sau cu axă mobilă de rotație, după cum axul său este fix sau mobil. În practică se utilizează foarte multe combinații cu scripeți cu axe fixe şi mobile de rotație, pentru a se realiza un raport cât mai mic între forța motoare şi cea rezistentă.

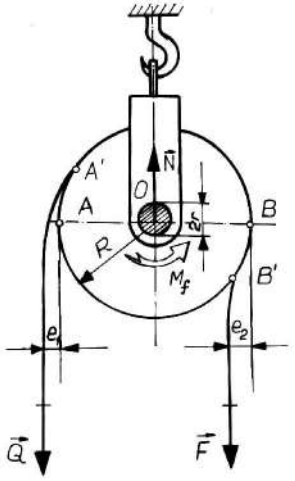


Fig. 5.12

În multe aplicaţii tehnice, cum este şi cazul scripetelui, este necesar să se renunţe la ipoteza că firul este perfect flexibil şi, ca atare, se va lua în considerare rigiditatea lui.

În continuare se va stabili o relaţie între forţele de la capetele firului, luând în considerare şi frecarea din axul scripetelui.

Astfel, în figura 5.12 s-a reprezentat un scripete cu axă fixă de rotaţie în O. Raza fusului articulaţiei este r, coeficientul de frecare global din articulaţie este μ iar raza scripetelui R. Peste acest scripete este trecut firul în capetele căruia acţionează: forţa $\vec{F}$ motoare şi forţa $\vec{Q}$ rezistentă.

Dacă firul ar fi considerat perfect flexibil, el s-ar înfăşura pe scripete în A şi s-ar desprinde în B. Datorită rigidităţii lui, firul condus, acţionat de forţa rezistentă $\vec{Q}$ întârzie să se înfăşoare cu o curbură mai mare a scripetelui, depărtându-se în acest fel cu distanţa e_1 de centrul scripetelui, contactul făcându-se în A' în loc de A. Firul conducător acţionat de forţa motoare $\vec{F}$, întârzie să se desprindă de scripete, înfăşurându-se mai mult pe acesta. Astfel, ramura conducătoare a firului se va desprinde în B', apropiindu-se de centrul O cu distanţa e_2.

Distanţele e_1 şi e_2 au mărimi apropiate.

Pentru a vedea cum influenţează rigiditatea firului şi frecarea din axul scripetelui, raportul dintre forţa motoare $\vec{F}$ şi forţa rezistentă $\vec{Q}$, se scriu ecuaţiile scalare de echilibru la limită, ale scripetelui:

$$\begin{aligned} &\sum Y_i = 0; N - F - Q = 0; \\ &\sum M_{Oi} = 0; -F(R - e_2) + Q(R + e_1) + M_f = 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Momentul de frecare din articulaţie are expresia:

$$M_f = \mu' \cdot r \cdot N = \mu' \cdot r \cdot (Q + F).$$

Înlocuind expresia momentului de frecare în ecuația a doua (5.30) şi grupând termenii, rezultă:

$$F(R - e_2 - \mu' r) = Q(R + e_1 + \mu' r) \text{ sau}$$

$$F = \frac{(R + e_1 + \mu' r)}{(R - e_2 - \mu' r)} Q = \left(1 + \frac{e_1 + e_2 + 2\mu' r}{R - e_2 - \mu' r}\right) Q. \tag{5.31}$$

La numitor termenii se pot neglija față de R. Astfel relația (5.31) devine:

$$F = \left(1 + \frac{e_1 + e_2}{R} + \frac{2\mu' r}{R}\right) Q = (1 + k_1 + k_2) Q = \lambda \cdot Q. \tag{5.32}$$

unde $k_1 = \frac{(e_1 + e_2)}{R}$ reprezintă coeficientul ce ține seama de rigiditatea firului; $k_2 = 2\mu' \frac{r}{R}$-un coeficient ce ține seama de frecarea din axul scripetelui; $\lambda = (1 + k_1 + k_2)$-coeficientul global al pierderilor din scripete.

Observații. a) coeficientul $\lambda > 1$, deci F>Q, scripetele simplu fix nu realizează o demultiplicare a forței motoare, ci are rolul de a schimba directia de acțiune a forței Q. Pentru a realiza o reducere a forței motoare în raport cu forța rezistentă se foloseşte scripetele mobil sau sisteme de scripeți;

b)coeficientul λ este adimensional şi are valori cuprinse între 1,02 şi 1.05 în funcție de diametrul firului şi natura lui, precum şi de sistemul de ungere al lagărului;

c) coeficientul λ (sau cifra scripetelui) reprezintă inversul randamentului scripetelui.

Randamentul scripetelui notat cu η reprezintă raportul dintre forța motoare ideală F, când nu se ia în considerare frecarea în axul scripetelui şi rigiditatea firului (λ=1) şi forța motoare reală F când $\lambda > 1$.Astfel pentru scripetele simplu studiat avem:

$$\eta = \frac{F_{ideal}}{F_{real}} = \frac{Q}{\lambda Q} = \frac{1}{\lambda}. \tag{5.33}$$

5.4. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze reacţiunile din încastrarea O pentru grinda cotită din figura 5.13, ştiind că asupra ei acţionează forţele $P_1 = 20N$, $P_2 = 10N$, forţa distribuită q = 60 N/m şi cuplul de forţe M = 20N. m (l = 1 m).

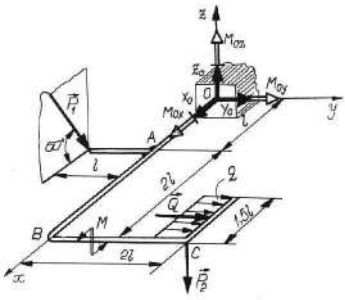


Fig. 5.13

Rezolvare. Se înlocuieşte încastrarea spaţială O cu trei forţe şi trei momente de reacţiune orientate după axele de coordonate:

$X_O, Y_O, Z_O, \quad M_x, M_y, M_z,$ iar forţele distribuite cu rezultanta lor $Q = 1{,}5 \cdot l \cdot q = 90N$. Ecuaţiile sca-lare de echilibru sunt:

$$\sum X_i = 0; X_O - P_1 \cos 60^\circ = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; Y_O + Q = 0;$$
$$\sum Z_i = 0; Z_O - P_1 \sin 60^\circ - P_2 = 0;$$
$$\sum M_{xi} = 0; lP_1 \sin 60^\circ + M_{Ox} - 2lP_2 = 0;$$
$$\sum M_{yi} = 0; M_{Oy} + lP_1 \sin 60^\circ + 3lP_2 + M = 0;$$
$$\sum M_{zi} = 0; M_{Oz} - lP_1 \cos 60^\circ + (3l - 0{,}75l)Q = 0.$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii rezultă cele şase necunoscute reacţiunile din încastrare: $X_O = 10$ N; $Y_O = 45$ N; $Z_O = 27{,}3$ N; $M_{Ox} = 1{,}3$ N m; $M_{Oy} = 43{,}65$ N m; $M_{Oz} = 45{,}625$ N m.

2. O placă dreptunghiulară de greutate Q=15N (fig.5.14) este articulată în A şi B şi menţinută în poziţie orizontală prin intermediul

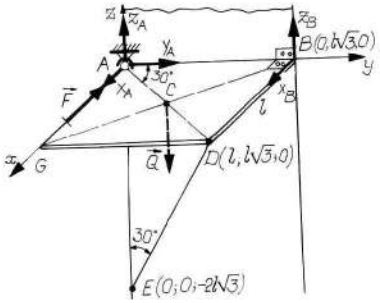


Fig. 5.14

barei DE. Asupra plăcii mai acționează forța F=30 N în planul plăcii. Să se calculeze reacțiunile din articulația sferică A, articulația cilindrică B şi din bara DE.

Rezolvare. Din figura 5.14 rezultă $AD = 2l, AB = 2l\cos 30^\circ, BD = l,$ $AE = AD\cos 30^\circ = 2l\sqrt{3}$. Condițiile de echilibru sunt date de relațiile (5.7) sub forma ecuațiilor vectoriale.Expresiile analitice ale forțelor active şi pasive sunt:

$$\vec{F} = -30\vec{i}; \vec{Q} = -15\vec{k}; \vec{R}_B = X_B\vec{i} + Y_B\vec{k};$$

$$\vec{R}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}; \vec{S} = S\cdot\vec{e}_{ED} = S\frac{\overline{ED}}{|\overline{ED}|} = \frac{1}{4}S\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}S\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}S\vec{k}.$$

Deci,

$$\vec{R}^a + \vec{R}^p = \left(-30 + X_B + X_A + \frac{S}{4}\right)\vec{i} + \left(Y_A + \frac{\sqrt{3}}{4}S\right)\vec{j} +$$

$$+\left(-15 + Z_B + Z_A + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)\vec{k} = 0.$$

Momentele forțelor active şi pasive în polul O sunt:

$$\vec{M}_{O(\vec{F})} = 0; \vec{M}_{O(\vec{R}_A)} = 0;$$

$$\vec{M}_{O(R_B)} = AB\times\vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & l\sqrt{3} & 0 \\ X_B & 0 & Z_B \end{vmatrix} = l\sqrt{3}Z_B\vec{i} - l\sqrt{3}X_B\vec{j};$$

$$\vec{M}_{O(Q)} = AC\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{l\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = -\frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{15l}{2}\vec{j};$$

$$\vec{M}_{O(S)} = AD \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & l\sqrt{3} & 0 \\ \frac{S}{4} & \frac{\sqrt{3}S}{4} & \frac{\sqrt{3}S}{2} \end{vmatrix} = \frac{3lS}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}lS}{2}\vec{j}.$$

Deci,

$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^p = \left(l\sqrt{3}Z_B - \frac{15l\sqrt{3}}{2} + \frac{3lS}{2} \right)\vec{i} + \left(\frac{15l}{2} - \frac{l\sqrt{3}S}{2} \right)\vec{j} - X_B l\sqrt{3}\vec{k} = 0.$$

Din cele două condiții, rezultă următorul sistem de ecuații:

$$X_A + X_B + \frac{S}{4} - 30 = 0; \quad l\sqrt{3}Z_B - \frac{15l\sqrt{3}}{2} + \frac{3lS}{2} = 0;$$

$$Y_A + \frac{\sqrt{3}}{4}S = 0; \quad \frac{15l}{2} - \frac{\sqrt{3}lS}{2} = 0;$$

$$Z_A + Z_B + \frac{\sqrt{3}}{2}S - 15 = 0; \quad -X_B \cdot l\sqrt{3} = 0.$$

Rezolvând sistemul se obțin cele şase necunoscute: $X_A = 27{,}25\text{N};$ $Y_A = -3{,}75\text{N}; Z_A = 7{,}5\text{N}; X_B = Z_B = 0; S = 5\sqrt{3}\text{N}.$

3. O antenă de televiziune (fig.5.15), orizontală de greutate $\vec{P}$ este fixată pe un ax vertical, ancorat prin intermediul a trei fire egale fixate în B, D şi E.

Cunoscând poziția centrului de greutate (KC=0,25 l) al antenei şi eforturile din firele (1) şi (2) $T_1 = T_2 = P\sqrt{2}/4$, şi OA = l, să se determine reacțiunile din articulația

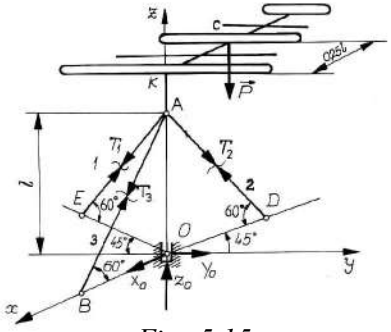


Fig. 5.15

O şi efortul din firul (3).

Rezolvare: Se înlocuiesc firele cu eforturile T_1, T_2, T_3 iar articulaţia O cu reacţiunile X_0 , Y_0, Z_0. Se alege sistemul de referinţă cu originea în O ca în fig.5.15.

Ecuaţiile scalare de echilibru pentru antenă sunt:

$$\sum X_i = 0; X_O + T_3 \cos 60^\circ - 2T_1 \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_O + T_2 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - T_1 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; Z_O - P - 2T_1 \cos 30^\circ - T_3 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_{yi} = 0; -0{,}25P + 1 \cdot T_3 \cos 60^\circ - 2T_1 \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

Rezolvând sistemul rezultă cele patru necunoscute ale problemei: $T_3 = P; X_O = -P/4;$

$$Y_O = 0; Z_O = 2{,}48P.$$

4. O bară omogenă OA=2a, de greutate G este articulată în O şi menţinută în echilibru sub un unghi q faţă de verticală (fig.5.16) prin intermediul unui fir trecut peste scripetele B, de dimensiuni şi frecare neglijabile. În capătul firului este fixată prisma de greutate P. Să se determine condiţia de echilibru şi reacţiunile din articulaţia O.

Rezolvare: Bara OA se află în echilibru condiţionat. Ea are o singură legătură mecanică, articulaţia O, care se înlocuieşte cu reacţiunile X_O şi Y_O Firul AB nu este considerat legătură: mecanică, în sensul definiţiilor date. În capătul A acţionează forţa P din capătul firului. Ecuaţiile scalare de echilibru pentru bară sunt:

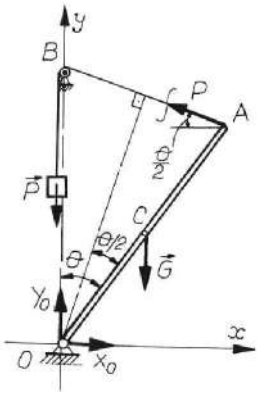


Fig. 5.16

$$\sum X_i = 0; X_O - P\cos\frac{\theta}{2} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_O - G + \sin\frac{\theta}{2} = 0;$$

$$\sum M_{Oi} = 0; -a \cdot \sin\theta \cdot G + 2a \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot P = 0.$$

Din ultima ecuație rezultă condiția de echilibru:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{P}{G} \text{ sau } \theta = 2\arcsin\frac{P}{G}.$$

Reacțiunile din articulație sunt:

$$X_O = P\cos\frac{\theta}{2} \text{ și } Y_O = G - P\sin\frac{\theta}{2}.$$

5. Un troliu de greutate G=100 N şi raze r, respectiv R=2r, se reazemă de un plan înclinat de un unghi $\alpha = 20^\circ$, față de orizontală. Pe circumferința de rază r este înfăşurat un fir la extremitatea căruia este suspendată o greutate Q (fig.5.17).

Cunoscând coeficienții m = 0,4 şi s = 0,01 r, între troliu şi plan să se determine limitele intervaluilui în care poate varia Q astfel încât troliul să ramână în repaus.

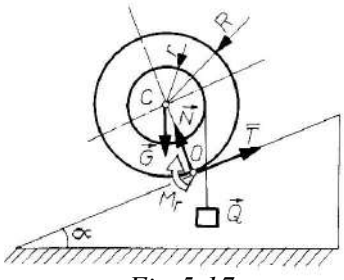


Fig.5.17

Rezolvare: Se înlocuieşte reazemul cu reacțiunea normală $\vec{N}$, forța de frecare $\vec{T}$, opusă tendinței de alunecare şi momentul (cuplul) de frecare la rostogolire M_r, considerând că rostogolirea se va efectua tot în jos. Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum X_i = 0; T - G\sin\alpha - Q\sin\alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; N - G\cos\alpha - Q\cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_{oi} = 0; GR\sin\alpha - M_r - Q(r - R\sin\alpha) = 0.$$

Pentru echilibrul troliului pe plan trebuie ca: $T \le \mu N$ şi $M_r \le sN$.

Rezolvând sistemul de ecuații rezultă $tg\alpha < m$ sau $tg20^\circ = 0,363 < 0,4$ condiția ca troliul să nu alunece pe planul înclinat, fiind îndeplinită.

Condiția ca troliul să nu se rostogolească în jos este:

$$Q_{min} = \frac{R\sin\alpha - s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha - s\cos\alpha} G = 181{,}20\text{N}.$$

Pentru cealaltă tendință de rostogolire (în sus) se schimbă doar sensul momentului de frecare la rostogolire M_r şi rezultă valoarea maximă a lui Q, la limita echilibrului:

$$Q_{max} = \frac{R\sin\alpha + s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha + s\cos\alpha} G = 233{,}33\text{N}.$$

Deci, pentru ca troliul să rămână în repaus, forța Q poate varia între limitele:

$181{,}20\text{N} \le Q \le 233{,}33\text{N}.$

6. Un laminor de tablă este format din doi cilindrii (valțuri) de diametru D care se rotesc în sens opus (fig.5.18). Distanța dintre cilindrii fiind a, iar coeficientul de frecare dintre tablă şi cilindrii m, se cere:

a) să se arate că, pentru a fi posibilă prinderea tablei încălzite, unghiul de frecare trebuie să fie mai mic decât unghiul a la centru;

b) să se determine grosimea maximă b a tablei încălzite care poate fi laminată. Aplicația numerică: D = 0,6 m; a = 0,05 m; m = 0,1.

Rezolvare: a) Considerând pentru simplificare că contactul dintre cilindrii şi tablă se face în punctele A şi B, în aceste puncte asupra tablei apar următoarele forțe: $\vec{N}$-reacțiunile din partea cilindrilor şi $\vec{T}$-forțele de frecare, tangente la cilindrii. Componentele orizontale ale forțelor de frecare $\vec{T}$, trag tabla între cilindrii, iar componentele orizontale ale reacțiunilor normale se opun mişcării tablei.

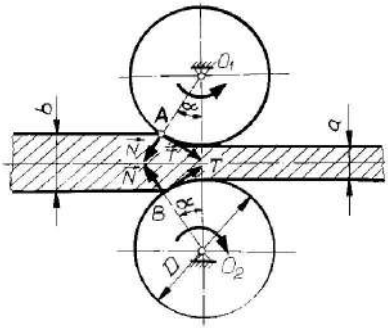


Fig. 5.18

Pentru a putea fi posibilă prinderea tablei între cilindrii laminorului este necesar ca:

$2T\cos\alpha \geq 2N\sin\alpha$, stiind cã $T = \mu N$.

la limită rezultă condiția $\mu \geq tg\alpha$ sau $tg\varphi \geq tg\alpha$. Deci, j>a, unde a este unghiul de frecare.

b) Grosimea maximă a tablei rezultă din trapezul O_1O_2AB, $b = a + D(1-\cos\alpha)$, stiind că $tg\alpha \leq \mu$, iar $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ rezultă $b \leq a + D\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)$. Inlocuind valorile numerice rezultă: b<0.053m.

reprezintă componentele scalare ale reacțiunii totale din articulație.

7. Uşa de la intrare într-o secție de turnătorie, formată dintr-o placă dreptunghiulară de greutate G = 400 N şi dimensiuni AD = BC = l = 2 m, AB = CD = 4m, este aşezată în poziție verticală şi se poate roti în jurul unui ax care coincide cu latura AB. Axul având raza r = 0,01 m se roteşte în două lagăre: unul radial B şi altul radial-axial A. Cunoscând coeficientul de frecare $\mu' = 0{,}3$ în lagărul radial şi $\mu = 0{,}2$ în lagărul axial, să se determine momentul minim M ce poate fi aplicat uşii astfel încât aceasta să poată fi rotită (fig.5.19).

Rezolvare. În lagărul A apare reacțiunea $\vec{R}_A$ cu cele trei componente scalare X_A, Y_A, Z_A, ,iar în lagărul radial B reacțiunile X_B şi Y_B. .Din cauza frecării în lagărele radiale A şi B apar momente de frecare M_{fA} şi M_{fB}, iar datorită frecării de pivotare in lagărul A, va apare şi un moment de frecare de pivotare M_{pA},

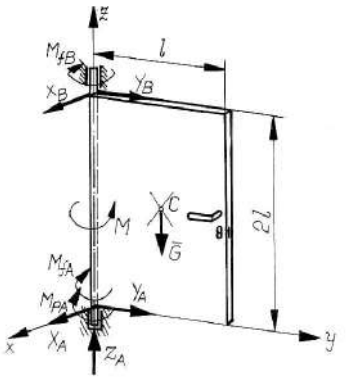


Fig.5.19

Ecuațiile scalare de echilibru pentru

uşă sunt:

$$\sum X_i = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + Y_B = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; Z_A - G = 0;$$

$$\sum M_{xi} = 0; -G \cdot \frac{l}{2} - Y_B \cdot 2 \cdot l = 0;$$

$$\sum M_{yi} = 0; 2 \cdot l \cdot X_B = 0;$$

$$\sum M_{zi} = 0; M - M_{fA} - M_{fB} - M_{pA} = 0.$$

Valorile la limită ale momentelor de frecare sunt:

$$M_{fA} = \mu' r\sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; M_{fB} = \mu' r\sqrt{X_B^2 + Y_B^2}; M_{pA} = \frac{2}{3}\mu r Z_A.$$

Rezolvând sistemul de ecuații se obține:

$$X_A = 0; X_B = 0; Y_A = G/4 = 100N; Y_B = -G/4 = -100N, \text{ iar}$$

$$M = \mu' r\frac{G}{2} + \frac{2}{3}\mu r G = 0{,}67N \cdot m.$$

8. Un troliu (1) de greutate G, raze 2r şi respectiv r este menținut în echilibru de o bandă de susținere (2). Pe circumferința de rază r este înfăşurat un fir în capătul căruia este fixată o prismă de greutate G/2. Să se determine valoarea coeficientului de frecare m, dintre troliu şi bandă pentru ca troliul să nu se rotească în interiorul benzii de susținere (fig. 5.20).

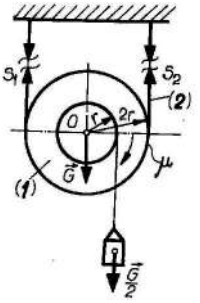


Fig. 5.20

Rezolvare: Notând cu S_1 si S_2 eforturile din cele două ramuri ale benzii de susținere, ecuațiile scalare de echilibru pentru troliu sunt:

$$\sum Y_i = 0; S_1 + S_2 - G - \frac{G}{2} = 0;$$

$$\sum M_{Oi} = 0; S_2 2r - S_1 2r - r - r\frac{G}{2} = 0 \text{ si} S_2 = S_1 e^{\mu\pi}.$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii rezultă:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\ln\frac{7}{5} = 0{,}107.$$

9. Un semifabricat de greutate Q=5 kN obţinut prin turnare este ridicat cu ajutorul unui scripete cu axă mobilă de rotaţie (fig.5.21). Cunoscând diametrul scripetelui D=0,3 m,diametrul axului scripetelui d=0,04m şi coeficientul global de frecare din axul scripetelui $\mu' = 0{,}02$, să se determine efortul S_1 necesar ridicării acestui semifabricat, precum şi efortul S_2 din ramura pasivă a cablului.

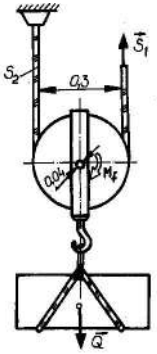


Fig.5.21

Rezolvare: În axul scripetelui apare un moment de frecare M_f care se opune tendinţei de rotaţie a scripetelui:

$$M_f = \mu'\frac{d}{2}Q = 0{,}2\left(\frac{0{,}04}{2}\right)5 = 0{,}02\text{kNm}.$$

Ecuaţiile scalare de echilibru ale scripetelui sunt:

$$\sum Y_i = 0; S_1 + S_2 - Q = 0;$$

$$\sum M_{Oi} = 0; S_1\frac{D}{2} - S_2\frac{D}{2} - M_f = 0.$$

Rezolvând sistemul rezultă:

$$S_1 = 2{,}566\text{kN}; \; S_2 = 2{,}434\text{kN}.$$

5.5. PROBLEME PROPUSE

1. Asupra unei bare de lungime 3a, rezemată în punctele A,B şi C acţionează o forţă verticală $\vec{F}$. Să se determine reacţiunile din reazeme,

ştiind că bara formează unghiul a cu orizontala (fig.5.22).

R. $N_A = F\text{tg}\alpha;\ N_B = \dfrac{3\cos^2\alpha - 2}{\cos\alpha}F;\ N_C = \dfrac{3\cos\alpha - 1}{\cos\alpha}F$

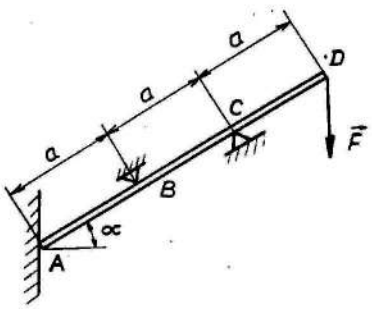


Fig. 5.22

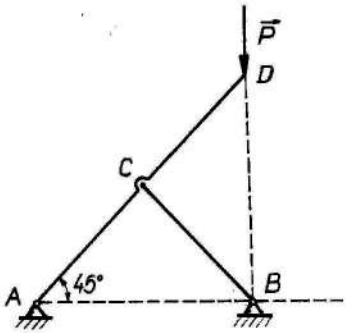


Fig. 5.23

2. Asupra barelor din figura 5.23 acţionează forţa verticală $\vec{P}$. Dacă AC = CD = CB, să se calculeze reacţiunile din A şi bara CB.

R. $X_A = P;\ Y_A = 0;\ R_{CB} = 1.41P$

3. Pentru grinda AC de lungime 8a şi greutate $\vec{Q}$ să se calculeze reacţiunile din A şi B, ştiind că asupra ei acţionează o forţă $\vec{P}$ sub unghiul de 45°, o forţă distribuită triunghiular, forţa unitară maximă fiind q_0 şi o forţă $\vec{Q}$ prin intermediul unui fir trecut peste scripetele O (fig. 5.24). Aplicaţie numerică: a = 1m; Q = 30 N; q_o = 3N/m; P = 60N.

R. $X_A = 42.3$ N; $Y_A = 40.6$ N; $R_B = 57.4$ P

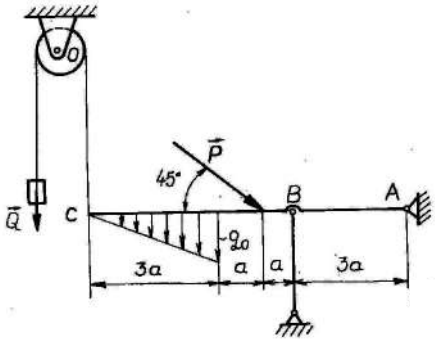


Fig. 5.24

4. Asupra unei bare cotite OABCD, acționează un sistem de forțe și cupluri. Cunoscând mărimile acestora: M_A = 4 Pa, $M_B = 2\sqrt{13}Pa$, $P_A = \sqrt{29}P$, P_C = 5 P, P_D = 3P, să se determine reacțiunile din încastrarea O (v. fig. 5.25).

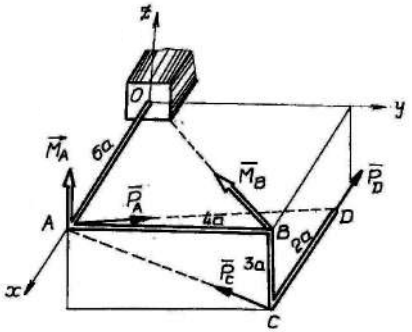


Fig. 5.25

R. X_O = 5P ; $Y_O = Z_O$ = 0; M_{Ox} = 6 Pa; M_{Oy} = -5 Pa; M_{Oz} = -16 Pa

5. Asupra unei bare având forma și dimensiunile din figura 5.26 acționează un sistem de forțe distribuite q și un cuplu de forțe de moment $M = 4qr^2$. Să se calculeze reacțiunile din încastrare dacă l = r.

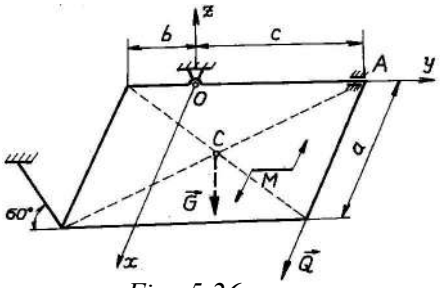


Fig. 5.26

R.

$$X_O = 0; Y_O = qr; Z_O = -qr; M_{Ox} = -2qr^2; M_{Oy} = -3qr^2; M_{Oz} = qr^2.$$

6. Să se calculeze reacțiunile din legăturile mecanice ale plăcii de greutate G = 8 kN, asupra căreia acționează cuplul de moment M = 4 kNm și forța Q =10 kN (fig. 5.27). Se cunoaște a = c = 4m iar b = 2m.

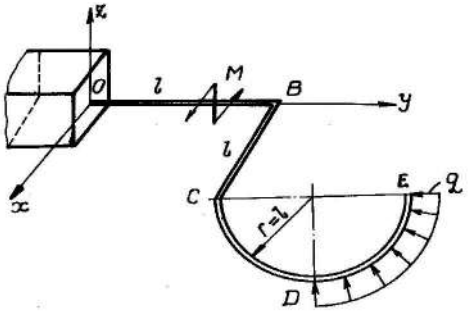


Fig. 5.27

R.
$$X_O=-\frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}\text{kN};\ Y_O=\frac{4}{\sqrt{3}}\text{kN};\ Z_O=0;$$
$$X_A=-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+9\right)\text{kN};\ Z_A=4\text{kN};\ S=\frac{8}{\sqrt{3}}\text{kN}.$$

7. O placă dretunghiulară OABD de greutate Q =10 N articulată în O şi D este menţinută în poziţie orizontală prin intermediul firului EH. Asupra plăcii acţionează o forţă P =5 N şi un cuplu de moment M=20 Nm situat în planul plăcii (fig.5.28). Să se determine reacţiunile din fir, articulaţia sferică O şi articulaţia cilindrică D dacă BE = ED = 0,5 m; OD = 2 m; a = 60^O; b = 30^O.

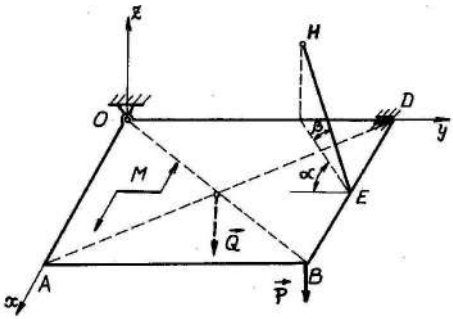


Fig. 5.28

R.
$$S_{EH}=40\text{N};X_O=5{,}68\text{N};Y_O=17{,}3\text{N};$$
$$Z_O=7{,}5\text{N};X_D=35{,}68\text{N};Z_D=-10\text{N}.$$

8. Roata unui vagon de rază R şi greutate P se află în faţa unui prag cu înălţime h (fig. 5.29).

Care este momentul cuplului ce trebuie aplicat roţii pentru ca ea să treacă de acest prag.

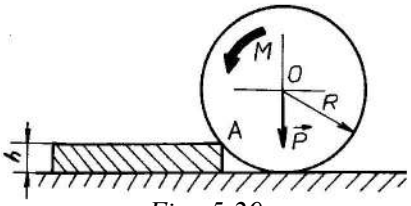


Fig. 5.29

R. $M=2PR\sqrt{\frac{h}{2R}\left(1-\frac{h}{2R}\right)}$

9. O uşă de greutate P = 300 N ce formează unghiul de 30^O cu planul normal vertical Oyz, este acţionată de forţa Q = 100 N prin intermediul unui fir trecut peste scripetele M de dimensiuni neglijabile. Uşa

este menținută în această poziție, prin intermediul firului orizontalEF, paralel cu axa Oy (v. fig.5.30). Să se determine reacțiunile din lagărele A şi B ale uşii şi efortul din firul EF, ştiind că: BC = AB/3 = 1 m iar DE = EC.

R. $x_A = 93{,}6$ N; $y_A = 25{,}2$ N; $z_A = 300$ N;
$x_B = 52{,}5$ N; $y_B = 24{,}3$ N; $S = 109{,}8$ N.

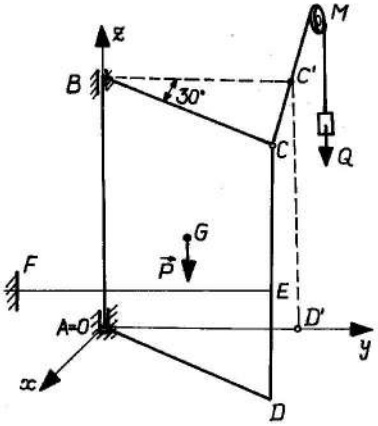


Fig. 5.30

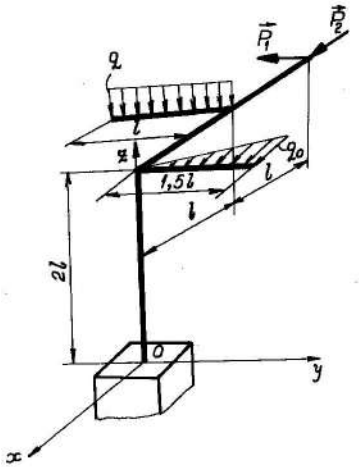


Fig. 5.31

10. Să se determine reacțiunile din încastrarea O pentru grinda din figura 5.31. Se dă $P_1 = P_2 = P$, $q = 2P/l$, $q_O = 6P/l$.

R. $x_O = 5{,}5$ P; $y_O = P$; $z_O = 2P$; $M_{Ox} = 3P$ l; $M_{Oy} = 9P$ l; $M_{Oz} = 2{,}5P$ l.

11. O scară rabatabilă de greutate P = 300 N, formează unghiul $a=60^O$ cu planul vertical. Ea este menținută în echilibru prin intermediul unui cablu MN. Să se determine: a) reacțiunile din articulațiile A şi B şi din cablu dacă centrul de greutate al scării se află la intersecția diagonalelor, iar AB = ED = EM = MA = AN = a; b) reacțiunile din cablu şi articulații dacă pe scara cea mai de jos, la mijloc, stă un om de greutate G = 600 N (fig. 5.32).

R. a) S = 519 N; $x_A = 259{,}5$ N; $z_A = 300$ N; $x_B = 0$; $z_B = 150$N;
b) S = 2595 N; $x_A = 1297$ N; $z_A = 1800$ N; $x_B = 0$; $z_B = 450$N

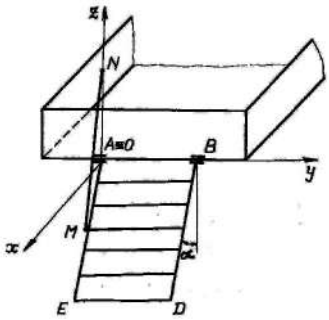


Fig. 5.32

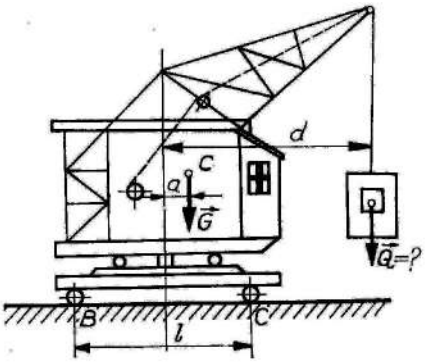


Fig. 5.33

12. O macara pe cale ferată de greutate G, se sprijină pe cele două osii în B şi C situate la distanța l. Ce greutate maximă Q poate ridica macaraua dacă centrul de greutate se află la distanța a față de axa de simetrie iar brațul forței Q este d (fig. 5.33).

R. $Q_{max}=\frac{l-2a}{2d-l}G$

13. Un pod rulant de greutate P =60 kN se deplasează pe două şine A şi B de-a lungulunei hale (fig. 5.34). Să se calculeze reacțiunile normale din punctele de sprijin în funcție de raportul n = AC/AB care indică poziția căruciorului C, ştiind că se ridică o greutate Q = 40 kN.

R. NA = 10 (7 - 4n) kN;
NB = 10 (3 + 4n) kN.

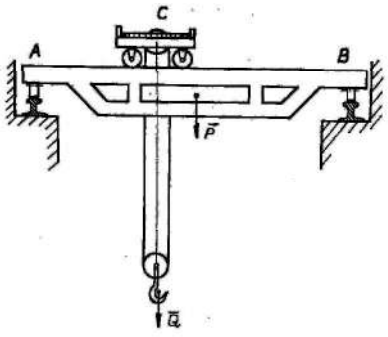


Fig. 5.34

14. O macara rotitoare de greutate G se sprijină pe trei roți în punctele A, B şi C ce formează un triunghi echilateral. Macaraua se roteşte în

jurul axei verticale ce trece prin punctul O (v. fig.5.35), ce ce corespunde cu centrul de greutate al macaralei. Să se determine reacțiunile din punctele de sprijin ale roților dacă Q = G și P = 0,5 G, în funcție de unghiul j de rotație al macaralei.

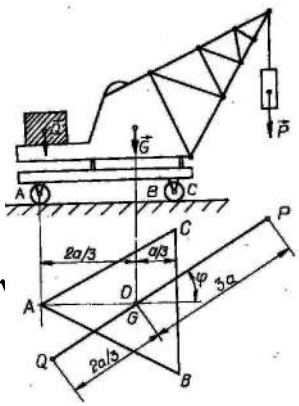


Fig. 5.35

R.

$$N_A=\frac{5}{6}G(1-\cos\varphi);\ N_B=\frac{G}{12}(10+5\cos\varphi-5$$

$$N_C=\frac{G}{12}(10+5\cos\varphi-5\sqrt{3}\sin\varphi).$$

15. O bară laminată de greutate G, lungime l și diametru d, este rezemată cu frecare în punctele E și D situate la distanța h (fig.5.36). știind că bara formează unghiul a cu orizontala, iar coeficientul de frecare este m, să se determine valorea limită x pentru ca bara să rămână în repaus.

R. $x\geq\frac{h}{2m}tg\alpha-\frac{d}{2}\mu-\frac{h}{2}$

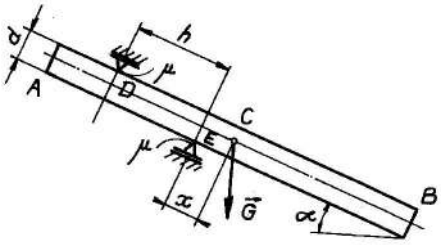


Fig. 5.36

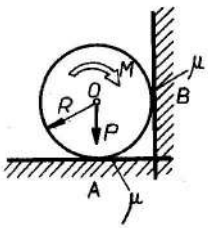


Fig. 5.37

16. Asupra unui disc de rază R și greutate P, acționează un cuplu de forțe de moment M; discul se sprijină în A pe un plan orizontal, iar în B pe un plan vertical (fig. 5.37). Cunoscând coeficientul de frecare m, să se determine valoarea lui M pentru ca discul să rămână în repaus.

R. $M\leq\frac{\mu(1+\mu)R\cdot P}{1+\mu^2}$

6.

STATICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

6.1. Clasificarea sistemelor de corpuri şi a forţelor de legătură 133

6.2. Teoreme pentru studiul sistemului de rigide..... 135

6.2.1. Teorema echilibrului părţilor (separării corpurilor) 135

6.2.2. Teorema solidificării (rigidizării corpurilor) 138

6.3 Grinzi cu zăbrele.....139

6.3.1 Definiţii. Ipoteze 139

6.3.2. Metode analitice pentru determinarea eforturilor din bare 142

6.4. Probleme rezolvate 147
6.5. Probleme propuse 151

6

STATICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

6.1. CLASIFICAREA SISTEMELOR DE CORPURI ŞI A FORŢELOR DE LEGĂTURĂ

Se numeşte sistem de corpuri, un ansamblu de corpuri legate între ele prin articulaţii sau reazeme simple şi legate cu spaţiul exterior fix prin reazeme simple, articulaţii sau încastrări.

Din punct de vedere mecanic sistemele de corpuri se pot clasifica în:

a) Sisteme rigide sau structuri, care au o configuraţie nedeformabilă;

b) Sisteme mobile sau mecanisme, cu o configuraţie deformabilă.

Sistemele rigide sau structurile sunt acele sisteme de corpuri la care legăturile interioare şi exterioare anulează toate gradele de libertate. Aceste sisteme pot fi static determinate sau static nedeterminate în funcţie de raportul în care se află numărul ecuaţiilor scalare de echilibru şi numărul necunoscutelor, reacţiunile din legăturile interioare şi exterioare. Un sistem static determinat (structură) s-a reprezentat în figura 6.1, a.

Sistemele mobile sau mecanismele sunt acele sisteme de corpuri, la care legăturile interioare şi exterioare ale sistemului permit corpurilor componente unele mişcări. Aceste sisteme numite şi sisteme variabile de corpuri se compun în scopul transmiterii unor mişcări, amplificării unor forţe sau momente. Un asemenea sistem variabil s-a reprezentat în figura 6.1,b. Unul din corpurile sistemului este elementul conducător sau motor, iar celelalte corpuri sunt conduse prin intermediul legăturilor interioare. În cazul acestor sisteme variabile de corpuri se pune problema condiţiei de echilibru, adică stabilirea unei relaţii între forţele de acţiune şi poziţia sa de echilibru. Această condiţie de echilibru se determină din ecuaţiile scalare de echilibru, aplicând însă teoremele de echilibru ale sistemelor de corpuri.

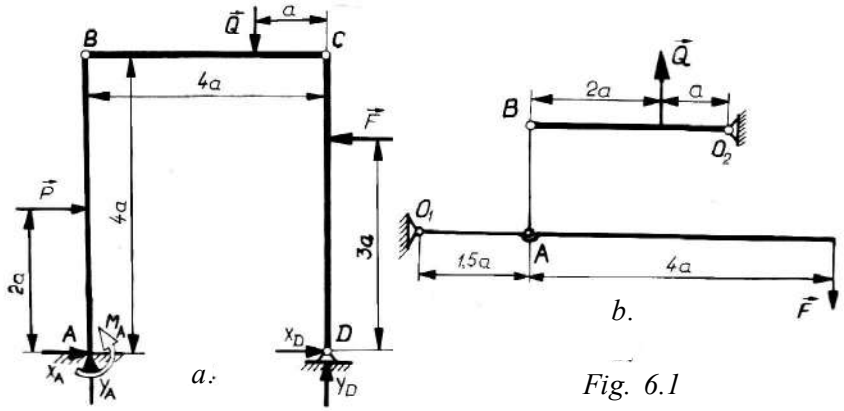


Fig. 6.1

Sistemele de corpuri static determinate sau static nedeterminate pot fi teoretic, în echilibru sub acţiunea oricărui sistem de forţe exterioare date. Un mecanism poate fi în echilibru numai în cazul unor sisteme de forţe particulare.

După cum legăturile se împart în legături exterioare şi interioare, şi forţele ce acţionează asupra unui sistem de corpuri se clasifică în: *forţe exterioare şi forţe interioare.*

Forţele exterioare pot fi la rândul lor: *forţe exterioare active*, date şi *forţe exterioare pasive*, de legătură sau *reacţiuni* din legăturile exterioare. Forţele exterioare exprimă interacţiunile mecanice dintre corpurile sistemului considerat cu alte sisteme materiale.

Forţele interioare reprezintă interacţiunea dintre corpurile aceluiaşi sistem; conform principiului acţiunii şi reacţiunii toate aceste forţe apar, perechi egale şi direct opuse.

Pentru sistemul din figura 6.1,a în legăturile exterioare A şi D apar forţe exterioare pasive, reacţiunile X_A, Y_A, M_A în încastrarea plană şi X_D, Y_D în articulaţia cilindrică. În legăturile interioare B şi C apar forţe interioare de legătură, câte două egale şi de sensuri contrare pentru fiecare articulaţie. Forţele P, Q, F sunt forţe exterioare date.

În cazul echilibrului unui sistem de rigide se întâlnesc trei categorii de necunoscute şi anume:

a) reacțiunile din legăturile exterioare ale sistemului de corpuri;

b) reacțiunile din legăturile interioare ale sistemului de corpuri;

c) valorile parametrilor independenți care determină poziția de echilibru a sistemului de corpuri (în cazul când echilibrul este condiționat).

6.2. TEOREME PENTRU STUDIUL ECHILIBRULUI SISTEMULUI DE RIGIDE

În rezolvarea problemelor de echilibru ale sistemelor de corpuri se cunosc următoarele teoreme:

6.2.1. Teorema echilibrului părților (separării corpurilor)

Dacă un sistem de corpuri solide rigide este în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare date şi a reacțiunilor din legăturile exterioare, atunci şi părți din acest sistem vor fi în echilibru sub acțiunea forțelor aferente lor (forțelor date şi de legătură).

Considerând un sistem de n corpuri solide rigide în echilibru, putem spune că fiecare corp luat separat va fi în echilibru. Pentru fiecare corp luat separat, se pot scrie şase ecuații scalare de echilibru în spațiu şi trei ecuații dacă sunt în plan. Pentru întregul sistem de n corpuri se scriu în total 6n ecuații independente de echilibru în spațiu şi 3n ecuații, dacă sistemul este în plan. Dacă sunt 6n necunoscute în spațiu, respectiv, 3n necunoscute în plan, sistemul este static determinat. Dacă sunt mai multe necunoscute sistemul este static nedeterminat. Numărul gradelor de libertate ale unui sistem de corpuri se poate calcula cu formulele:

-în spațiu: $m = 6c - 6î - 3a_s - 2a_c - r$ (6.1)

-în plan $m = 3c - 3î - 2a_c - r$ (6.2)

unde: c-reprezintă numărul corpurilor sistemului; î-reprezintă numărul încastrărilor; a_s -reprezintă numărul articulațiilor spațiale; a_c -reprezintă numărul articulațiilor cilindrice; iar r-reprezintă numărul reazemurilor simple.

Pentru exemplificare se consideră în figura 6.2. un sistem plan format din trei corpuri. Acest sistem de corpuri este un transportor cu lopată, utilizat pentru încărcarea cuptoarelor cu diferite materiale. El este format din căruciorul 1 pe care este fixată coloana 2 de greutate $\vec{P}$ în capătul căreia este fixată lopata 3 de lungime l cu încărcătura de greutate $\vec{Q}$. Căruciorul 1 se deplasează pe şinele grinzilor 3 şi 4 articulate în C, având lungimile a şi b, respectiv, greutăţile $\vec{G}_1$ şi $\vec{G}_2$. Grinzile sunt încastrate în A şi rezemate în C.

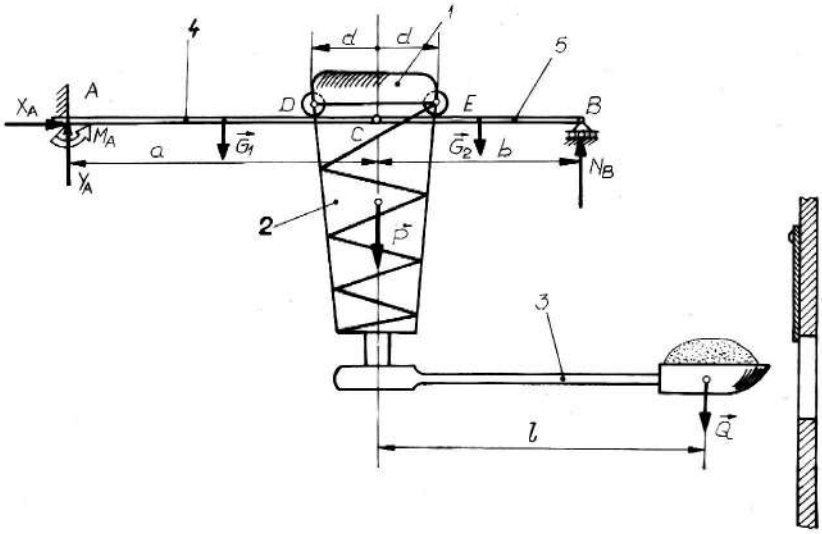


Fig. 6.2

După cum se observă în cadrul sistemului de corpuri din figura 6.2 încastrarea A şi rezemarea B sunt legături exterioare. Articulaţia C şi rezemările căruciorului în D şi E sunt legături interioare. Prin separarea corpurilor şi aplicarea axiomei legăturilor, forţele care îşi fac echilibrul sunt reprezentate în figura 6.3. În articulaţia C şi rezemările D şi E, care reprezintă legături interioare, se aplică principiul acţiunii şi reacţiunii, adică forţele de legătură sunt egale şi direct opuse.

Pentru forţele coplanare ce acţionează asupra corpurilor din figura 6.3 se scriu următoarele ecuaţii de echilibru:

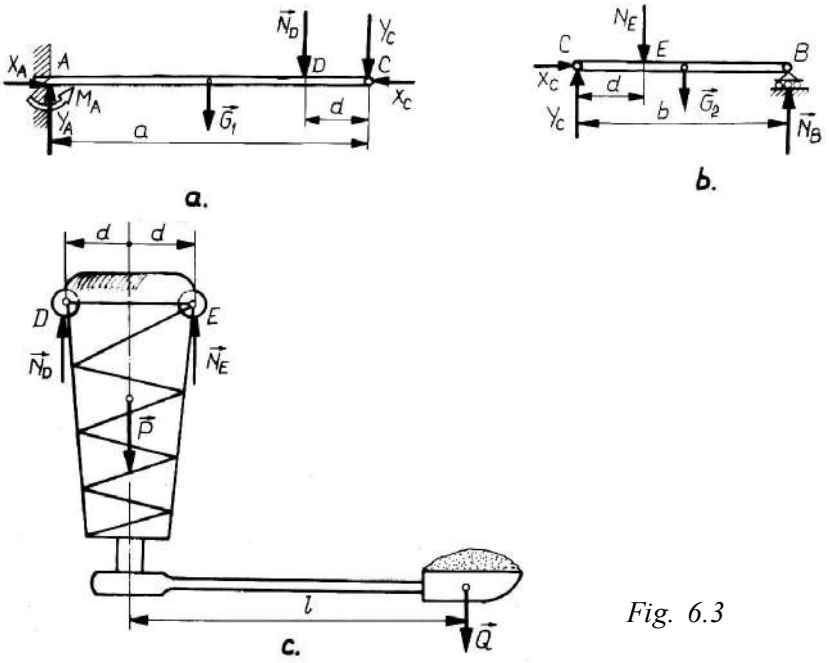


Fig. 6.3

-Bara AC (fig. 6.3,a)

$$\sum X_i = 0; X_C = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A - N_D - G_1 + Y_C = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; -M_A - \frac{a}{2} \cdot G_1 - (a-d) \cdot N_D - a \cdot Y_C = 0.$$

-Bara BA (fig. 6.3,b):

$$\sum X_i = 0; X_C = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_C - N_E - G_2 + N_B = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; -d \cdot N_E - \frac{b}{2} \cdot G_2 + b \cdot N_B = 0.$$

-Căruciorul 1 (fig. 6.3,c):

$$\sum Y_i = 0; N_D + N_E - P - Q = 0;$$

$$\sum M_{Di} = 0; 2d \cdot N_E - d \cdot P - l \cdot Q = 0.$$

În total s-au scris 8 ecuaţii cu 8 necunoscute X_A, Y_A, M_A, Y_C, X_C, N_E, N_D şi N_B. Sistemul este static determinat. În cazul unei aplicaţii numerice dacă: a = 8m, b = 6m, d=0,5m, l=2m, Q =1kN, P =4kN, G_1 =0,5kN, G_2 =0,4kN, rezultă următoarele necunoscute X_C=X_A=0, N_E =4kN, N_D = 1kN, N_B = 0,53kN, Y_C = 8,25kN, Y_A = 9,75kN, M_A = 75,5kN·m.

Prin aplicarea teoremei separării corpurilor se pot determina reacţiunile din legăturile interioare şi exterioare precum şi parametrii geometrici care definesc poziţia de echilibru în cazul sistemelor aflate în echilibru condiţionat. Această metodă prezintă dezavantajul că ea conduce la multe ecuaţii cu multe necunoscute, rezolvarea cărora crează uneori dificultăţi.

Observaţie: dacă în legătura interioară acţionează o forţă exterioară dată, prin aplicarea teoremei echilibrului părţilor legătura interioară devine punct material în echilibru şi se vor scrie ecuaţiile de echilibru separat pentru această legătură.

6.2.2. Teorema solidificării (rigidizării corpurilor)

Condiţiile de echilibru ale unui rigid sunt valabile şi în cazul unui sistem de corpuri, liber sau supus la legături, ca şi când sistemul ar deveni rigid (nedeformabil) păstrându-şi legăturile exterioare iniţiale iar cele interioare fiind considerate solidificate.

În acest fel se va considera sistemul întreg ca un singur corp rigid în echilibru sub acţiunea forţelor direct aplicate şi a forţelor din legăturile exterioare şi se vor scrie ecuaţiile scalare de echilibru. Prin aplicarea acestei teoreme se vor scrie atâtea ecuaţii cât şi pentru un singur corp. Deci, dacă sistemul de forţe este spaţial se pot scrie şase ecuaţii de echilibru, iar dacă este plan numai trei.

Ecuaţiile de echilibru care se obţin sunt necesare, dar nu totdeauna şi suficiente pentru echilibrul unui sistem deformabil de corpuri. Uneori din aceste ecuaţii de echilibru se pot determina reacţiunile şi poziţia de echilibru a sistemului.

Aplicarea acestei teoreme a solidificării are astfel avantajul că ea conduce la un număr mic de ecuaţii şi dezavantajul că în multe cazuri numărul necunoscutelor, care determină poziţia de echilibru a sistemului

şi reacţiunile, este mai mare decât cel al ecuaţiilor independente de echilibru ale sistemului rigid, astfel încât cu teorema solidificării nu se pot determina toate aceste necunoscute. În plus, cu această teoremă nu se pot determina forţele interioare.

Observaţie:Teorema solidificării se poate aplica şi unor grupe formate din două sau trei corpuri din sistem.

Pentru exemplificare se consideră sistemul din figura 6.1,a. Prin aplicarea teoremei solidificării se pot scrie trei ecuaţii scalare de echilibru pentru întregul sistem considerat ca un singur corp:

$$\sum X_i = 0; X_A + P + X_D - F = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + Y_D - Q = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; M_A - 2a \cdot P - 3a \cdot Q + 3a \cdot F + 4a \cdot Y_D = 0.$$

Aceste ecuaţii nu sunt suficiente pentru aflarea celor cinci necunoscute. Pentru ridicarea acestei nedeterminări aparente, mai sunt necesare încă două ecuaţii. Ştiind că în articulaţii momentul încovoietor este nul, se vor scrie două ecuaţii, sume de momente în articulaţia B pentru bara AB şi în articulaţia C pentru bara CD. Aceste ecuaţii sunt:

-pentru bara AB:

$$\sum M_{Bi} = 0; 2a \cdot P + M_A + 4a \cdot X_A = 0;$$

-pentru bara CD:

$$\sum M_{Ci} = 0; -a \cdot F + 4a \cdot X_D = 0.$$

Cu cele cinci ecuaţii se pot determina cele cinci reacţiuni din legăturile exterioare: M_A, X_A, X_D, Y_A, Y_D.

6.3. GRINZI CU ZĂBRELE

6.3.1 Definiţii. Ipoteze

Grinda cu zăbrele reprezintă un sistem invariabil de bare articulate între ele la extremităţi. În acest caz articulaţiile se mai numesc şi noduri. Legăturile interioare şi exterioare nu permit deplasări relative între corpurile sistemului. Aceste sisteme se mai numesc structuri invariabile.

Grinzile cu zăbrele pot fi plane sau în spaţiu. Aceste sisteme invariabile

au dese utilizări în tehnică fiind folosite la construcţia podurilor metalice, a podurilor rulante, a macaralelor, a stâlpilor metalici pentru susţinerea cablurilor electrice etc.

După forma lor, grinzile cu zăbrele se clasifică în: grinzi cu zăbrele parabolice (fig.6.4,a), grinzi cu zăbrele dreptunghiulare (fig. 6.4,b), grinzi cu zăbrele trapezoidale (fig. 6.4,c), grinzi cu zăbrele triunghiulare (fig. 6.4,d) etc.

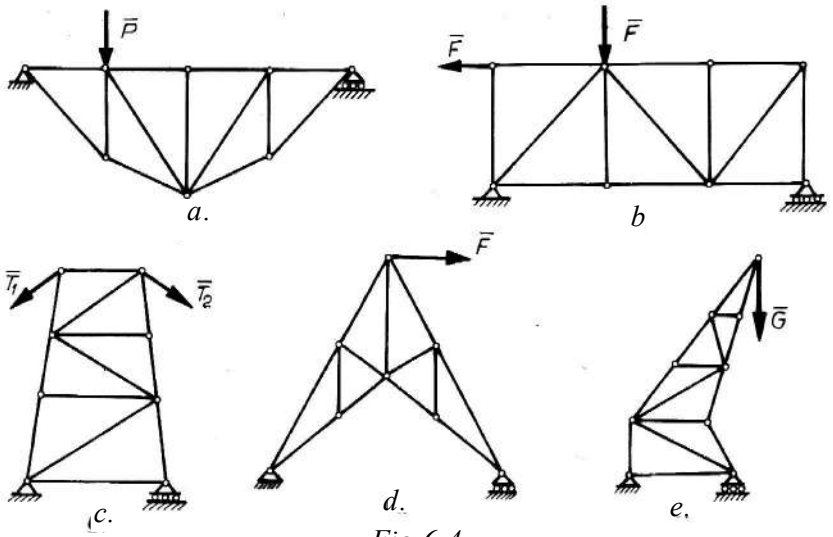


Fig.6.4

În studiul grinzilor cu zăbrele se fac următoarele *ipoteze simplificatoare*:

a) barele sunt drepte şi rigide, iar dimensiunile secţiunii transversale sunt neglijabile comparativ cu lungimea lor;

b) barele sunt articulate la extremităţi, considerate fără frecare.Aceste articulaţii se mai numesc noduri. În realitate barele sunt profile STAS unite între ele cu nituri sau sudură prin intermediul unor plăci metalice numite guseu;

c) forţele exterioare se consideră aplicate în noduri şi sunt coplanare cu grinda cu zăbrele;

d) greutatea barelor este neglijabilă în comparaţie cu mărimile forţelor

exterioare. Dacă în mod special se cere să se țină seama de greutățile barelor, atunci se vor repartiza în părți egale în nodurile de la extremități.

Ca o consecință a acestor ipoteze, o bară izolată din sistem, neâncărcată pe lungimea ei, este în echilibru numai dacă forțele din articulațiile de la capete sunt egale, de sensuri contrare şi au direcția barei.

Prin urmare, eforturile din barele grinzilor cu zăbrele pot fi de întindere (fig. 6.5,a) sau de compresiune (fig. 6.5,b). În aceste figuri sunt reprezentate eforturile care acționează asupra barei, iar alăturat efortul care acționează asupra nodului, egal şi de sens contrar cu cel de la capătul barei, în cele două situații: bară întinsă şi bară comprimată. În general, materialele se comportă diferit la solicitările de tracțiune față de solicitările de compresiune. Spre exemplu, o bară de aceiaşi secțiune, la tracțiune rezistă la eforturi de 3...4 ori mai mari decât la compresiune, unde există şi pericolul de flambaj.

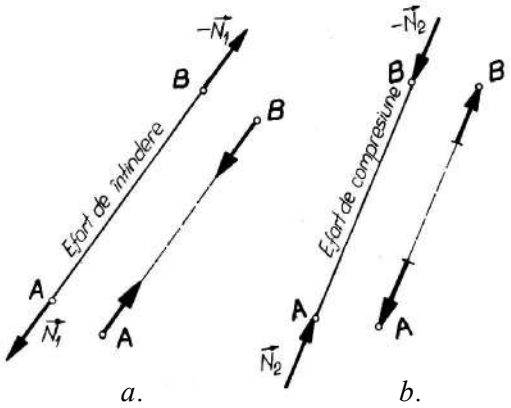


Fig. 6.5

Grinzile cu zăbrele pot fi static determinate sau static nedeterminate. Acestea la rândul lor pot fi plane sau spațiale. În continuare se vor studia grinzile cu zăbrele plane, static determinate. Structura este static determinată dacă numărul ecuațiilor de echilibru, scrise pentru fiecare nod în parte, este egal cu numărul necunoscutelor, eforturile din bare şi reacțiunile din legăturile exterioare ale grinzii cu zăbrele. Această condiție, pentru grinzile plane, se exprimă prin relația:

$$2n = b + r, \tag{6.3}$$

unde: n-reprezintă numărul nodurilor; b-reprezintă numărul barelor; r-reprezintă numărul reacțiunilor din legăturile exterioare, acestea fiind trei, deoarece un capăt al grinzii este articulat iar celălalt rezemat.

Problema generală care se pune este aceea de a determina mărimea

şi sensul eforturilor din bare, în vederea unui calcul ulterior de dimensionare sau verificare. Această problemă se rezolvă cu ajutorul teoremelor şi metodelor obişnuite de studiu a sistemelor de corpuri. Astfel, metoda izolării corpurilor devine, în calcul grinzilor cu zăbrele **metoda izolării nodurilor**, iar metoda echilibrului părţilor devine **metoda secţiunilor** (Ritter). Pe lângă aceste metode analitice există însă şi metode grafice de determinare a eforturilor: metoda planului Cremona şi metoda Culman.

Oricare ar fi metoda de calcul se parcurg următoarele etape:

a) se verifică dacă sistemul este static determinat, cu relaţia (6.3);

b) se determină reacţiunile din legăturile exterioare, aplicând teorema solidificării (se consideră întregul sistem ca un singur corp);

c) se determină eforturile din bare, cu una din metodele prezentate în continuare.

6.3.2. Metode analitice pentru determinarea eforturilor din bare

Determinarea eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele prin aceste metode constituie de fap, o aplicaţie la teoremele pentru studiul echilibrului sistemelor de corpuri.

a) Metoda izolării nodurilor. Grinda cu zăbrele este privită ca un sistem plan de puncte materiale (nodurile) legate între ele prin bare. Conform teoremei separării corpurilor dacă întregul sistem (grindă cu zăbrele) este în echilibru atunci fiecare punct (nod) este în echilibru sub acţiunea forţelor date şi de legătură care-i revin.

Forţele care acţionează un nod izolat formează un sistem de forţe coplanare şi concurente, deci condiţia necesară şi suficientă de echilibru a unui nod este ca rezultanta forţelor care-l acţionează să fie zero. Din această condiţie aplicată tuturor nodurilor se determină eforturile din bare. Pentru aplicarea acestei metode este necesar să se facă unele *consideraţii*:

-eforturile din bare se consideră că ies din nod şi au direcţia barelor; prin aceasta se face ipoteza că barele sunt solicitate la întindere; în consecinţă, eforturile care se obţin din calcule cu semnul plus sunt de

întindere, iar cele care rezultă cu semnul minus sunt de compresiune;

-se izolează succesiv fiecare nod începând şi apoi continuând cu nodurile care introduc în calcul cel mult două necunoscute (două eforturi din două bare);

-şi în acest caz se aplică principiul acţiunii şi reacţiunii eforturilor cunoscute deja se vor introduce în nodurile următoare conform naturii lor, adică: dacă sunt eforturi de întindere se vor introduce ca "ieşind" din noduri, iar dacă sunt eforturi de compresiune se vor introduce ca "intrând" în noduri (v. fig. 6.5,b).

Aplicaţie. Se cere să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.6, aplicând teorema izolării nodurilor. Se cunosc forţele exterioare ce încarcă sistemul şi dimensiunie grinzii cu zăberle.

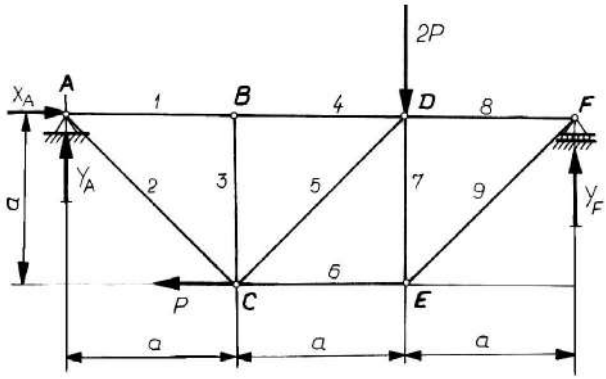


Fig. 6.6

Rezolvare: Se notează nodurile şi barele grinzii cu zăbrele şi se verifică dacă sistemul este static determinat cu relaţia 2n=b+3, unde n=6 şi b =9. Sistemul este static determinat.

Se calculează eforturile din legăturile exterioare: articulaţia A şi rezemarea D, cu ecuaţiile de echilibru:

$$\begin{aligned} &\sum X_i = 0; X_A - P = 0, \\ &\sum Y_i = 0; Y_A - Y_F - 2P = 0, \\ &\sum M_{Ai} = 0; -aP - 4aP + 3aY_F = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Rezolvând sistemul, rezultă:

$$X_A = P; Y_A = P/3; Y_F = 5P/3. \tag{6.5}$$

Se izolează nodurile ca în figura 6.7, pentru fiecare nod scriindu-se două ecuaţii scalare de echilibru. Reacţiunile exterioare fiind determinate,

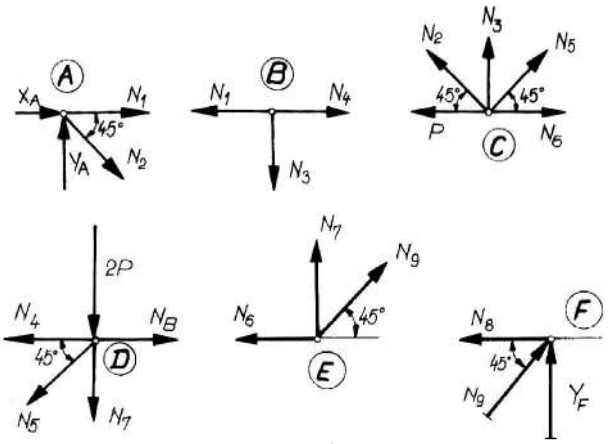


Fig. 6.7

la ultimul nod F, ambele ecuații sunt de verificare.

-Nodul A:

$$P + N_1 + N_2\sqrt{2}/2 = 0;$$

$$P/3 - N_2\sqrt{2}/2 = 0;$$

-Nodul B:

$$-N_1 + N_4 = 0; -N_3 = 0.$$

-Nodul C:

$$-P - N_2\sqrt{2}/2 + N_5\sqrt{2}/2 + N_6 = 0;$$

$$N_2\sqrt{2}/2 + N_3 + N_5\sqrt{2}/2 = 0.$$

-Nodul D:

$$-N_4 - N_5\sqrt{2}/2 + N_8 = 0;$$

$$-N_7 - N_5\sqrt{2}/2 - 2P = 0.$$

-Nodul E:

$$-N_6 + N_9\sqrt{2}/2 = 0; N_7 + N_9\sqrt{2}/2 = 0.$$

-Nodul F:

$$-N_8 + N_9\sqrt{2}/2 = 0; N_9\sqrt{2}/2 + 5P/3 = 0.$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații rezultă cele nouă necunos-

cute, eforturile din cele 9 bare. Rezultatele şi tipul solicitării barelor, s-au trecut în tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

Efortul în bară	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9
Valoarea efortului	$-\frac{4P}{3}$	$+\frac{\sqrt{2}P}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{2}P}{3}$	$+\frac{\sqrt{2}P}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}P}{3}$	$-\frac{5P}{3}$	$-\frac{5P}{3}$	$+\frac{5\sqrt{2}P}{3}$
Tipul solicit.	comp.	întind.	nesolicit.	comp.	întind.	comp.	comp.	comp.	întind.

Metoda izolării nodurilor prezintă dezavantajul că o eventuală greşeală, făcută pe parcursul calculului se transmite în calculele ulterioare neputând fi constatată decât la sfârşit.

b) Metoda secţiunilor (Ritter), ca şi metoda izolării nodurilor, este aplicarea teoremei echilibrului părţilor la studiul grinzilor cu zăbrele. Metoda anterioară are dezavantajul că atunci când dorim să determinăm efortul într-o anumită bară, suntem nevoiţi să calculăm trecând din nod în nod, eforturile într-o serie de bare, chiar când aceste eforturi nu interesează în problemă.

Metoda Ritter înlătură acest dezavantaj, cu ajutorul ei putându-se determina efortul din bara care dorim sau din maxim trei bare secţionate. Prin secţionarea celor trei bare se obţin două părţi distincte. Fiecare parte astfel obţinută trebuie să fie în echilibru sub acţiunea forţelor date, a reacţiunilor exterioare care-i revin şi a eforturilor din barele secţionate. Secţiunea aleasă trebuie să întâlnească cel mult trei bare de efort necunoscut şi care să nu fie toate trei paralele sau concurente într-un punct care nu este nod, în caz contrar grinda este incorect alcătuită. În final, se studiază echilibrul uneia din părţi.

Aplicaţie. Pentru grinda cu zăbrele, de formă dreptunghiulară,din figura 6.8 se cer eforturile din barele 6, 7 şi 8, cunoscând forţele exterioare $\vec{Q}$ şi dimensiunile barelor prin cota a.

Rezolvare. Sistemul de bare este static determinat deoarece verifică ecuaţia: 2n= b+3, unde n=10 şi b=7. Se calculează reacţiunile din legăturile exterioare, considerând întregul sistem solidificat, ca un singur corp. Ecuaţiile de echilibru static sunt:

$$\sum X_i = 0; X_K - Q = 0;$$

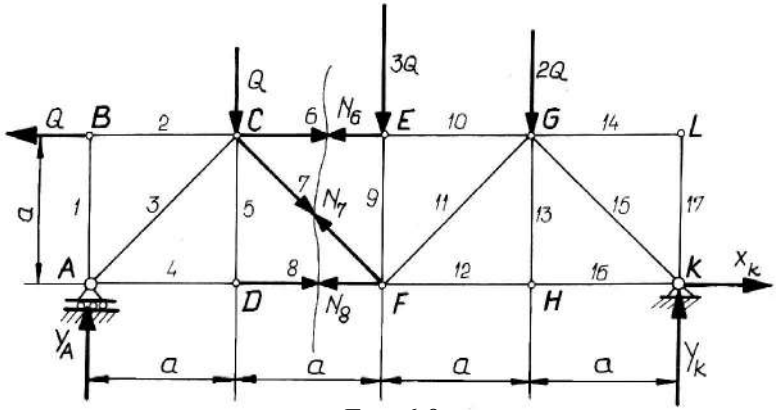


Fig. 6.8

$$\sum Y_i = 0; Y_A - Q - 3Q - 2Q + Y_K = 0; \qquad (6.6)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; aQ - aQ - 6aQ - 6aQ + 4aY_K = 0;$$

Rezolvând sistemul rezultă:

$$X_K = Q; Y_A = 3Q; Y_K = 3Q. \qquad (6.7)$$

Se secționează grinda cu zăbrele prin cele trei bare ale căror eforturi se cer (fig.6.9,a,b). Se studiază echilibrul părții din stânga (fig.6.9,a), deoarece asupra ei actionează un număr mic de forțe.

Ecuațiile scalare de echilibru pentru sistemul din figura 6.12,a sunt:

$$\sum X_i = 0; -Q + N_6 + N_8 + N_7\sqrt{2}/2 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A - Q - N_7\sqrt{2}/2 = 0; \qquad (6.8)$$

$$\sum M_{Ci} = 0; -aY_A + aN_8 = 0.$$

Din care rezultă că:

$$N_8 = Y_A = 3Q; N_7 = \sqrt{2}/2Q; N_6 = -4Q.$$

La scrierea ecuațiilor de echilibru pentru partea izolată se va urmări obținerea unor ecuații cât mai simple, de preferință cu câte o singură necunoscută. Aceasta este posibil dacă se folosesc ecuații de momente în raport cu puncte convenabil alese, care să elimine două din cele trei necunoscute. Astfel, pentru partea izolată din figura 6.9,a condiția de echilibru se poate exprima prin două ecuații de momente în raport cu

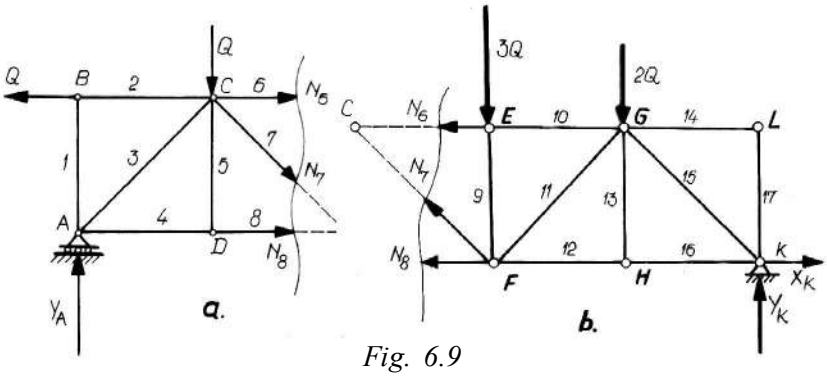


Fig. 6.9

punctele C şi F pentru aflarea eforturilor N_8 şi N_6, precum şi o sumă de proiecţii pe verticală pentru aflarea efortului N_7.

Metoda izolării nodurilor corespunde specificului proiectării, unde trebuie cunoscute eforturile din toate barele în vederea dimensionării iar metoda a doua Ritter, este indicată pentru verificarea calculelor sau a dimensionării anumitor bare.

6.4 PROBLEME REZOLVATE

1. Se dă sistemul de corpuri format din două bare cotite, articulate între ele (fig. 6.10,a). Cunoscând forţele şi momentele exteriore ce încarcă sistemul, să se determine reacţiunile din legăturile exterioare şi interioare.

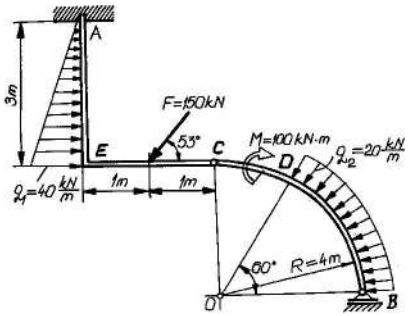


Fig. 6.10,a

Rezolvare: Se izolează corpurile (fig. 6.10,b,c), legăturile exterioare (încastrarea plană A, rezemarea B) şi legătura interioară (articulaţia cilindrică C) se înlocuiesc cu reacţiunile corespunzătoare. Sistemul este static determinat. Forţele

distribuite se înlocuiesc cu rezultatele lor: Q_1 = AE. q_1 /2 = 3. 40/2 = 60kN; Q_2=BD. q_2 = 4. 20 = 80kN. Se scriu ecuațiile scalare de echilibru pentru fiecare corp în parte:

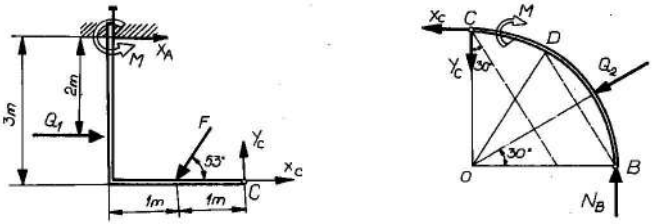


Fig. 6.10,b,c

-pentru bara AEC (fig. 6.4,b):

$$\sum X_i = 0; X_A \cdot Q_1 + X_C - F \cdot \cos 53^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A - F \cdot \sin 53^\circ + Y_C = 0,$$

$$\sum M_{Ai} = 0; M_A + 2Q_1 + 2Y_C + 3Y_C - 3 \cdot F \cdot \cos 53^\circ - 1 \cdot F \cdot \cos 53^\circ = 0;$$

-pentru bara CDB (fig. 6.4,c):

$$\sum X_i = 0; - X_C - Q_2 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; - Y_C - Q_2 \cdot \sin 30^\circ + N_B = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; - M - 4 \cdot Q_2 \cdot \cos 30^\circ + 4N_B = 0.$$

Rezolvând sistemul celor şase ecuații cu cele şase necunoscute M_A, X_A, Y_A, X_C, Y_C,şi N_B, reacțiunile din legături rezultă:

M_A = 369,88 kN·m; X_A = 99,55 kN; Y_A = 65,51 kN; X_C = -69,28 kN; Y_C = 54,28 kN; N_B = 94,28 kN.

2. Pentru ridicarea lingourilor cu ajutorul macaralei se foloseşte dispozitivul de prindere tip cleşte din figura 6.11. Cunoscând elementele geometrice ale dispozitivului şi greutatea lingoului $\vec{G}$, să se afle

coeficientul de frecare m, între cleşte şi lingou, astfel încât el să poată fi transportat. Greutatea dispozitivului se neglijează.

Rezolvare: Se izolează corpurile, se înlocuiesc legăturile interioare cu reacţiunile corespunzătoare şi se scriu ecuaţiile scalare de echilibru:

-pentru nodul F (fig. 6.11,a):

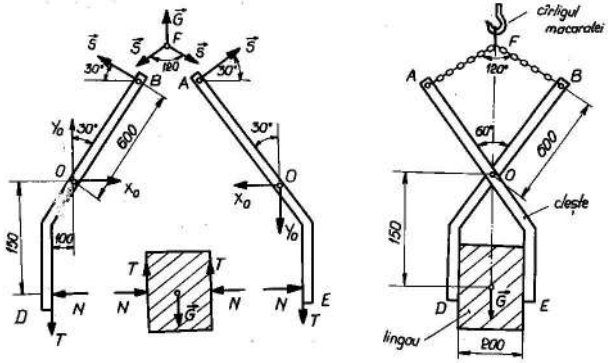


Fig. 6.11

$$\sum X_i = 0; S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; G - S_1 \sin 30^\circ - S_2 \sin 30^\circ = 0;$$

-pentru un braţ al cleştelui (fig. 6.5,b):

$$\sum X_i = 0; -S_1 \cos 30^\circ + X_O - N_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; S_1 \sin 30^\circ + Y_O - T_2 = 0;$$

$$\sum M_O = 0; 0{,}6S_1 + 0{,}1T_2 - 0{,}15N_2 = 0;$$

-pentru lingoul de greutate G (fig. 6.5,c):

$$\sum X_i = 0; N_1 - N_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; T_1 + T_2 - G = 0, \text{ unde } T_1 = \mu N_1 \text{ şi } T_2 = \mu N_2.$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii rezultă:

$$S_1 = S_2 = G; N_1 = N_2 = G/2\mu; T_1 = T_2; Y_O = 0; X_O = \frac{G}{2}\left(\frac{1}{\mu} + \sqrt{3}\right)$$

iar coeficientul de frecare de alunecare $\mu = 0{,}115$.

3. Trei semifabricate sub forma unor bare de secţiune circulară de aceiaşi greutate G şi rază R sunt legate cu un cablu, pentru a putea fi ridicate cu ajutorul unui cârlig de macara. Cablul formează unghiuri de 45° cu axa verticală în punctul de prindere în cârlig. Să se determine efortul din cablu şi reacţiunile din bare pentru poziţia de echilibru.

Rezolvare. Sistemul fiind simetric se va studia numai echilibrul a două dintre cele trei bare. Se izolează corpurile şi se scriu ecuaţiile scalare de echilibru:

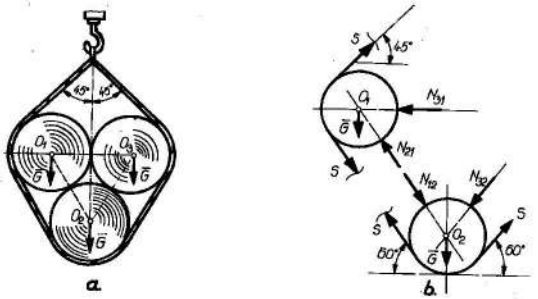


Fig. 6.12

-pentru bara cu centru în O_1:

$$\sum X_i = 0; -N_2 - N_1 \cos 60^\circ + S\cos 45^\circ + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; N_1 \sin 60^\circ + S\sin 45^\circ - S\sin 60^\circ - G = 0;$$

-pentru bara cu centrul în O_2:

$$\sum X_i = 0; N_1 \cos 60^\circ - N_3 \cos 60^\circ - S\cos 60^\circ + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; -N_1 \sin 60^\circ - N_3 \sin 60^\circ - G + 2S\sin 60^\circ = 0;$$

Rezolvând sistemul celor patru ecuaţii rezultă cele patru necunoscute:

$$S = \frac{3G}{\sqrt{2}}; N_1 = N_3 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6} G; N_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} G.$$

6.5. PROBLEME PROPUSE

1. Două bare sub forma unui semicerc (fig. 6.13) sunt articulate între ele şi acţionate de o forţă P la distanţa 0,5 R faţă de C. Să se calculeze reacţiunile din articulaţiile A şi B.

R. $R_A = \frac{P\sqrt{10}}{4}; R_B = \frac{P\sqrt{2}}{4}$

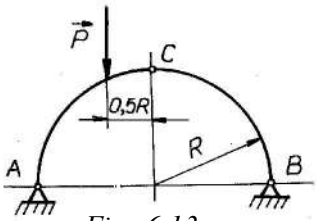


Fig. 6.13

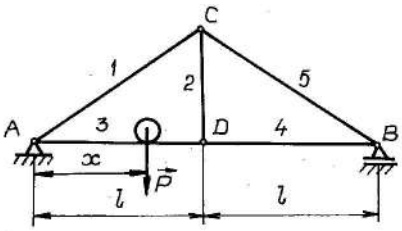


Fig. 6.14

2. Un cărucior de greutate P, asimilat cu un punct, se deplasează pe un pod a cărei schemă este prezentată în figura 6.14. Să se determine eforturile din elementele podului, în funcţie de coordonata x, dacă unghiul a = 30^O.

R. Dacă x Ł l, $S_1 = S_5 = -\frac{Px}{l}; S_2 = \frac{Px}{l}; S_3 = S_4 = \frac{Px\sqrt{3}}{2l}$

Dacă x > l,

$$S_1 = S_5 = -\frac{P(2l - x)}{l}; S_2 = \frac{P(2l - x)}{l}; S_3 = S_4 = \frac{P(2l - x)\sqrt{3}}{2l}$$

3. Asupra sistemului de corpuri din figura 6.15 acţionează forţa Q prin intermediul unui fir trecut peste rola de rază a/4, cuplul de moment M şi forţa distribuită liniar,forţa unitară maximă fiind q_O. Dacă M = 4aq şi q_O = 3Q/a să se calculeze reacţiunile X_B şi Y_B din articulaţia B.

R. X_B = 0.75Q; Y_B =2Q.

4. O macara pentru încărcarea furnalelor, are un mecanism A prin intermediul căruia se deplasează pe două role de-a lungul unei şine montate pe un pod rulant D.

În capătul O al unei grinzi rigide verticale E (fig. 6.16), sub forma unei coloane, este montat un mecanism de răsturnare a încărcăturii de greutate Q. Care este greutatea P a căruciorului şi a coloanei verticale, pentru a se putea transporta o încărcătură Q = 15 kN, situată în cuplă la distanța de 5 m față de axa coloanei. Greutatea căruciorului şi a coloanei se consideră că acționează pe axa OA iar distanțele de la axa căruciorului la cele două role sunt de 1 m.

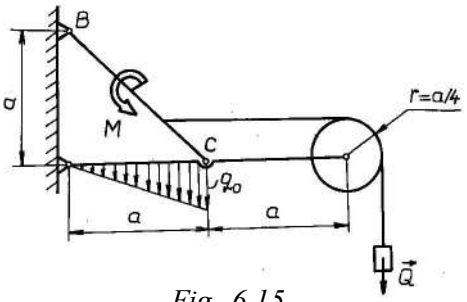


Fig. 6.15

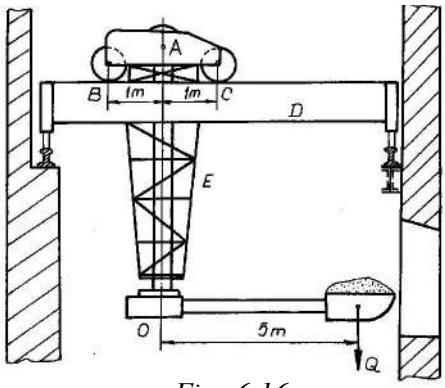


Fig. 6.16

R. P ≥ 6 kN.

5. Culisa C articulată în capătul barei CB de lungime l se sprijină pe bara încastrată AD. Asupra barei CB acționează o forță distribuită triunghiular, forța unitară maximă fiind q_O. Dacă l = 3m şi q_O = 100 N/m, să se calculeze reacțiunile din A şi B (v. fig. 6.17).

R. X_A = 28,8 N; Y_A = 50 N; M_A = 200 N.m;
X_B = 28,8 N;
Y_B = 100 N.

6. Pe grinda BE sunt fixate două role de aceeaşi rază r = a/2. Asupra sistemului acționează forța Q prin intermediul unui fir trecut peste cele două role. Capătul firului este fixat în F pe grinda AC încastrată în A. Grinda BE se sprijină în C pe capătul grinzii AC. Asupra acestei grinzi

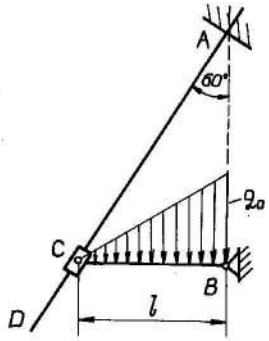


Fig. 6.17

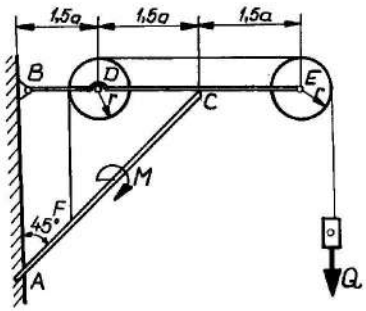


Fig. 6.18

acționează un cuplu de forțe de moment M. Dacă momentul M = 6aQ să se calculeze reacțiunea din C şi momentul din încastrarea A (v. fig. 6.18).

R. $N_C = 2Q$; $M_A = 11\ Qa$.

7. Un pod provizoriu având forma din figura 6.19, este montat pe roți, ce se deplasează pe şinele A şi B. Cablul care ridică greutatea P este fixat în punctul C situat la partea superioară a macaralei. Cablul care ridică greutatea P = 50 kN de pe stativul situat lateral formează unghiul $\alpha = 20^o$ cu axa verticală. Pentru a evita balansarea greutății, se aplică o forță pe direcția orizontală GH. Presupunând că componenta orizontală din cablul CP este preluată de şina B, să se determine forța S_1 din grinda orizontală CF în momentul ridicării greutății de pe stativ şi să se compare această forță S_1 cu forța S_2 care acționează când a este nul. Dimensiunile sunt cele indicate în figura 6.19.

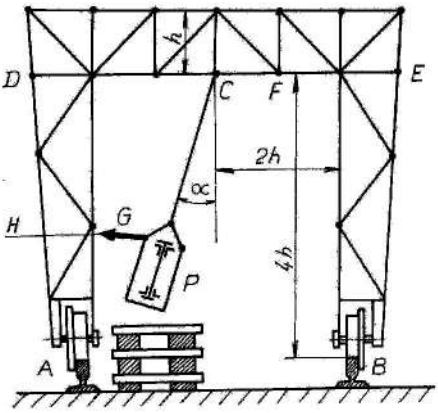


Fig. 6.19

R. $S_1 = 104{,}6$ kN; $S_2 = 5$ kN.

8. Să se determine analitic eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.20, asupra căreia acționează forța P = 10 kN.

R. N_1 = -11,2 kN; N_2 = -5 kN; N_3 = 4,48 kN.

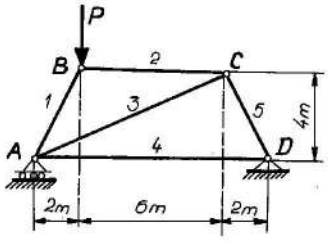


Fig. 6.20

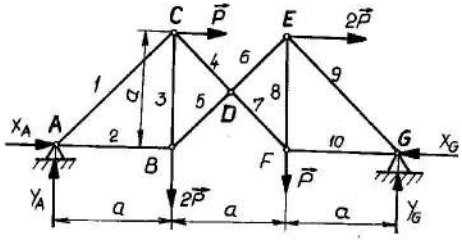


Fig. 6.21

9. Se dau două grinzi cu zăbrele articulate între ele ca în figura 6.21. Să se determine reacțiunile din legăturile exterioare și eforturile din barele 1, 2 și 3 (se formează unghiuri de 90^O și 45^O). Se dă : AD = BC = EF = FG = BF = a.

R. X_A=P; Y_A=2P/3; X_G=-4P; Y_G=7P/3;

$$S_1 = -P\sqrt{2}/3; S_2 = P\sqrt{2}/3; S_3 = -5P\sqrt{2}/3$$

10. Să se determine eforturile din elementele grinzii cu zăbrele din figura 6.22 știind că P = 0,1 kN, a = 15^O iar barele 2, 3, 4 și 5 sunt egale.

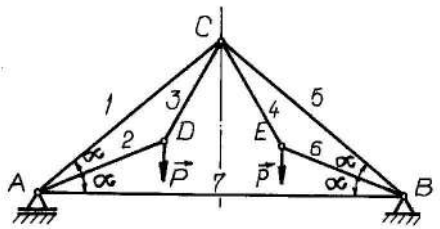


Fig. 6.22

R. $S_1 = S_6 =$

$= -2P(1+\sin 15^O) =$

$= -0,251$ kN;

$S_3 = S_4 = 2P\cos 15^O = 0,193$ kN;

$$S_2 = S_5 = P\sqrt{2} = 0.141\text{kN}$$

$$S_7 = P\sqrt{3}(1+\sin 15^\circ) - P\sqrt{2}\cos 15^\circ = 0,081\text{kN}$$

11. Ventilul de siguranță al unui cazan cu abur este legat prin

articulația B de pârghia OA, care are lungimea l = 0,4 m şi greutatea G = 20 N. Distanța OB = a = 0,05 m. În punctul C este suspendată o greutate G = 325 N. Suprafața ventilului este de 25 cm^2. Să se determine distanța OC = x pentru ca ventilul să se deschidă la o presiune, în cazan, mai mare decât p=103,3 N/cm^2. Greutatea ventilului se neglijează (v.fig.6.23).

R. x = 0,39 m.

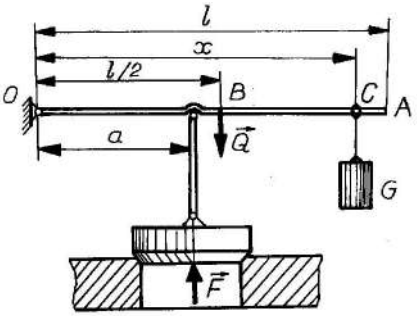


Fig. 6.23

12. Determinați mărimea forței Q ce apasă asupra corpului M, în cazul presei din figura 6.24. Forța P = 0,2 kN acționează asupra pârghiei OE = 1 m, perependicular. În această poziție a presei, tija AB este perpendiculară pe OA =0,1 m şi împarte unghiul CBD în jumătate. Unghiul α = arctg 0,2 = 11^{O} 20'.

R. Q = 5 kN.

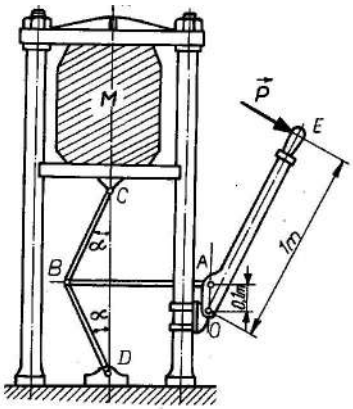


Fig. 6.24

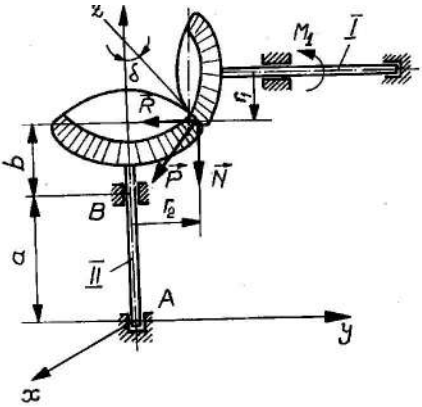


Fig. 6.25

13. Asupra axului conductor I orizontal, al angrenajului conic din figura 6.25, acționează momentul M_1. Să se calculeze momentul M_2 ce acționează asupra axului condus II şi reacțiunile din lagărele acestui ax A

şi B. Razele medii ale celor două roţi conice sunt r_1 şi r_2.

Indicaţie: Forţele radială R şi normală N ce acţionează asupra dintelui angrenajului conic, în funcţie de forţa P tangentă, se calculează cu următoarele formule : $R = P \operatorname{tg}\alpha \cos\delta$ şi $N = P \operatorname{tg}\alpha \sin\delta$, unde $\operatorname{tg}\delta = r_2/r_1$ şi $\alpha = 20^O$.

R. $M_2 = \dfrac{M_1 r_2}{r_1}; X_A = \dfrac{M_1 b}{r_1 a}; Y_A = \dfrac{M_1 \operatorname{tg}\alpha}{r_1 a}(r_2 \sin\delta - b\cos\delta)$

$$Z_A = \frac{M_1}{r_1}\operatorname{tg}\alpha \sin\delta; X_B = \frac{M_1(a+b)}{r_1 a}; Y_B =$$

$$\frac{M_1 \operatorname{tg}\alpha}{r_1 a}\left[(a+b)\cos\delta - r_2 \sin\delta\right]$$

14. Lanţul DE al unei macarale tip graifăr este prins în D cu două bare DA = DA' = 0,6 m. Barele sunt articulate de pârghiile ABC şi A'B'C' care se rotesc în jurul articulaţiilor B şi B' situate pe bara de legătură BB'. Doi saboţi fixaţi în C şi C' ajută la prinderea şi ridicarea greutăţii Q = 10 kN, prin frecare. Distanţa dintre articulaţiile C şi C' la bara orizontală de legătură este 0,5 m (v. fig. 6.26), iar distanţa dintre punctul C şi bara AD este CM = 1 m. Distanţa DF fiind 0,1 m, determinaţi forţa care apare în bara rigidă BB', neglijând greutatea mecanismului.

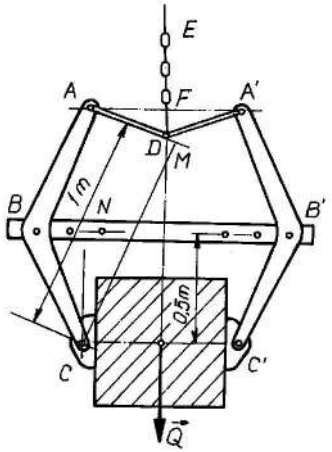


Fig. 6.26.

R. N = 60 kN.

15. O scândură de lungime 2l şi greutate $\vec{G}$ se află în echilibru în poziţie orizontală, fiind prinsă la capete printr-un fir trecut peste două suprafeţe cilindrice fixe. Coeficientul de frecare dintre fir şi suprafeţele cilindrice fiind μ se cere să se determine distanţa maximă x, faţă de

centrul de greutate C, la care se poate aşeza o găleată de greutate $\vec{Q}$, astfel încât echilibrul sistemului de corpuri să se menţină (v. fig. 6.27).

R. $x = \dfrac{(e^{\mu\pi} - 1)l}{(e^{\mu\pi} + 1)} \cdot \dfrac{G + Q}{Q}$

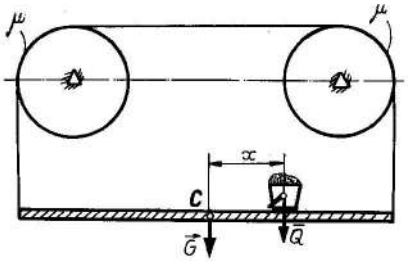


Fig. 6.27

16. Care este domeniul de variaţie al forţei $\vec{Q}$, pentru ca sistemul de corpuri din figura 6.28 să fie în repaus. Se cunosc coieficienţii de frecare μ_1 şi μ_2, coeficientul λ al scripetelui, unghiul planului înclinat a şi greutatea $\vec{G}$.

R. $\dfrac{(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)}{} G < Q < \lambda e^{3\pi\mu_1/2}(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha)G$

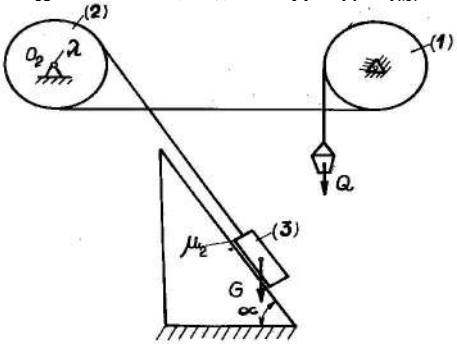


Fig. 6.28

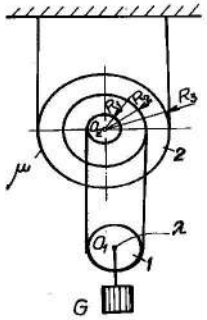


Fig. 6.29

17. Pentru scripetele mobil O_1 coeficientul global al pierderilor este λ, iar între troliul O_2 şi banda de susţinere a întregului ansamblu, coeficientul de frecare este μ. Să se determine valoarea lui m pentru ca sistemul să rămână în echilibru la limită (v.fig. 6.29).

R. $\mu = \dfrac{1}{\pi} \ln \dfrac{\lambda(R_3 - R_1) + (R_3 + R_2)}{\lambda(R_3 + R_1) + (R_3 - R_2)}$

18. Maşina de ridicat din figura 6.30 este dotată cu o frână cu saboți "permanent închisă" prin intermediul resortului care dezvoltă forța $\vec{P}$. Deschiderea frânei se realizează cu ajutorul unui electromagnet E, care dezvoltă forța $\vec{F}$, fiind legat în serie cu motorul de antrenare al tobei de cablu. Să se determine: a) momentul motor M care trebuie aplicat la axul tobei de cablu pentru ca greutatea $\vec{Q}$ să urce uniform; b) valoarea minimă a forței $\vec{P}$ din resort, care este necesară pentru ca greutatea $\vec{Q}$ să nu coboare pe plan ($\alpha > \varphi$); c) forța minimă din electromagnet necesară pentru a deschide frâna.

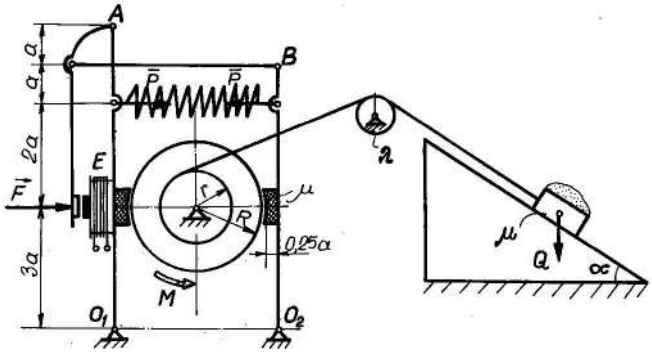


Fig. 6.30

R.

a) $M = \lambda r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)Q;$

b) $P = \dfrac{9 - 0.0625\mu^2}{30\mu\lambda R}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)rQ;$

c) $F = \dfrac{5}{24}P.$

CINEMATICA

7.

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

7.1. Noțiuni generale ale cinematicii 161
7.1.1. Traiectoria 161
7.1.2. Viteza punctului 162
7.1.3. Accelerația 163
7.1.4. Viteza şi accelerația unghiulară 165
7.1.5. Formulele lui Poisson 166
7.2. Studiul mişcării punctului în diferite sisteme de referință 167

7.2.1. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate carteziene 167
7.2.2. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate cilindrice şi polare 168
7.2.3. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate naturale (triedrul lui Frenet) 171
7.2.4. Calculul razei de curbură a traiectoriei 172
7.3. Mişcări particulare ale punctului material 174
7.3.1. Mişcarea uniformă a punctului 174
7.3.2. Mişcarea uniform variată 175
7.3.3. Mişcarea circulară 177
7.3.4. Mişcarea oscilatorie armonică 179
7.4 Probleme rezolvate 180
7.5. Probleme propuse 189

CINEMATICA

7

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

Cinematica este partea Mecanicii care studiază mişcarea mecanică a corpurilor materiale, fără a lua în considerare masa acestora, forţele şi momentele ce acţionează asupra lor. Cinematica urmăreşte aspectul geometric al mişcării, acţionând cu parametrul timp.

Problema fundamentală a cinematicii este următoarea: cunoscând la orice moment t, poziţia sistemului material faţă de un reper ales, se cer determinate elementele cinematice ale mişcării fiecărui punct ce aparţine sistemului şi anume traiectoria, viteza şi acceleraţia.

În cele ce urmează se va analiza succesiv mişcarea punctului, a solidului rigid şi a sistemelor de corpuri, la început în raport cu sisteme de referinţă fixe, apoi în raport cu repere mobile.

7.1. NOŢIUNI GENERALE ALE CINEMATICII

Studiul mişcării unui punct material faţă de un sistem de referinţă, presupune stabilirea traiectoriei, vitezei şi acceleraţiei punctului.

7.1.1. Traiectoria

Reprezintă locul geometric al poziţiilor succesive pe care le ocupă punctul în timpul mişcării. În general poziţia unui punct faţă de un sistem de referinţă este definită dacă se cunoaşte variaţia în timp a vectorului de poziţie al punctului (fig. 7.1), faţă de originea O a reperului fix:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (7.1)$$

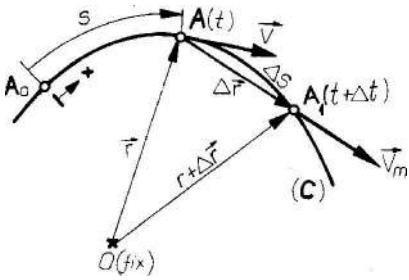


Fig. 7.1.

Relația (7.1) numită și ecuația vectorială a traiectoriei (C), indică poziția mobilului la orice moment. Această funcție vectorială $\vec{r}(t)$ trebuie să îndeplinească următoarele condiții: să fie continuă, uniformă (punctul nu poate ocupa simultan mai multe poziții) finită în modul și derivabilă de cel puțin două ori. Primele două derivate definesc două mărimi fizice, viteza și accelerația punctului, așa cum se va vedea în cele ce urmează.

Dacă traiectoria este o curbă continuă și admite o singură tangentă într-un punct, atunci poziția punctului material pe traiectorie se poate determina utilizând un singur parametru scalar s. Această coordonată curbilinie, reprezintă arcul de curbă măsurat de la originea arcelor A_O, în sensul mișcării. În acest caz, mișcarea punctului material poate fi definită printr-o singură ecuație scalară:

$$s = s(t) \tag{7.2}$$

Ecuația (7.2) se numește legea orară a mișcării.

7.1.2. Viteza punctului

Pentru caracterizarea mișcării unui punct este necesar să se introducă un nou element și anume viteza punctului.

Se consideră un punct A (fig. 7.1) în mișcare pe traiectoria (C) și două poziții ale punctului. La momentul t mobilul se află în poziția A indicată de vectorul de poziție $\vec{r}$, iar la momentul $(t + \Delta t)$ mobilul se află în A_1, având vectorul de poziție $(\vec{r} + \Delta\vec{r})$. În intervalul de timp Δt, mobilul a parcurs arcul Δs care se poate asimila cu elementul de coardă Δr. Mișcarea punctului între cele două poziții A și A_1 este caracterizată de **viteza medie**, care este egală cu raportul dintre spațiul parcurs Δs și

intervalul de timp corespunzător Δt. Dacă intervalul de timp Δt este suficient de mic, arcul se asimilează cu coarda $(\Delta s \cong \Delta r)$, iar viteza medie poate fi interpretată ca mărime vectorială:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{7.3}$$

Această viteză este o mărime vectorială având direcţia şi sensul vectorului $\Delta \vec{r}$. Viteza medie depinde de poziţia punctelor A şi A_1 de pe traiectorie şi caracterizează mai bine mişcarea când intervalul Δt este mai mic. Dacă intervalul de timp Δt tinde la zero, viteza medie devine viteză instantanee, trecând la limită relaţia (7.3):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{7.4}$$

Deci, viteza instantanee este o mărime de vectorială ce se exprimă prin derivata în raport cu timpul a vectorului de poziţie al punctului la momentul considerat. Această viteză caracterizează direcţia, sensul mişcării şi spaţiul parcurs în unitatea de timp. Viteza instantanee este un vector tangent la traiectorie, la momentul considerat:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau},$$

unde $\vec{\tau}$ este versorul tangentei la traiectorie, iar $\dot{s} = v$ modulul vitezei.

Întrucât în problemele de Cinematică şi Dinamică variabila independentă este timpul t, derivata unor funcţii scalare sau vectoriale se vor reprezenta cu ajutorul unor puncte aşezate deasupra funcţiilor care se derivează.

7.1.3. Acceleraţia

Pentru a caracteriza variaţia vitezei punctului în mişcarea sa pe traiectorie, se va defini un nou element cinematic al mişcării şi anume acceleraţia punctului. Se consideră un mobil A (fig. 7.2.) care parcurge pe traiectoria (C) arcul $\overset{\frown}{AA_1}$ în intervalul de timp Δt, trecând de la viteza

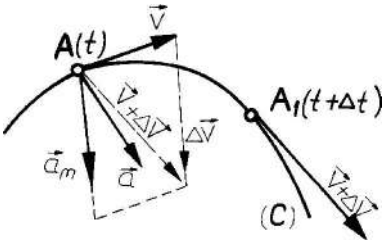


Fig. 7.2,

$\vec{v}$ în A la timpul t, la viteza $\vec{v}+\Delta\vec{v}$, în A_1 la momentul $(t+\Delta t)$. În acest interval de timp Δt viteza mobilului s-a modificat cu $\Delta\vec{v}$. Prin definiție, accelerația medie a mobilului pe arcul $\overset{\frown}{AA_1}$, este raportul dintre variația vitezei şi intervalul de timp în care a avut loc această variație:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (7.5)$$

Accelerația medie caracterizează variația vitezei în intervalul de timp Δt şi este coliniară cu vectorul $\Delta\vec{v}$; ea ne dă o indicație globală asupra variației vectorului viteză.

Trecând la limită raportul (7.5), când intervalul de timp Δt tinde la zero, se obține accelerația instantanee a punctului material:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (7.6)$$

Deci. accelerația este o mărime vectorială egală cu derivata în raport cu timpul a vectorului viteză sau cu derivata de ordinul doi în raport cu timpul a vectorului de poziție $\vec{r}$. Ea caracterizează variația vitezei ca direcție, sens şi mărime.

Observații: - accelerația este orientată întotdeauna spre interiorul concavității traiectoriei; - dacă produsul scalar dintre viteză şi accelerație, $\vec{v}\cdot\vec{a}$, este pozitiv, mişcarea punctului este accelerată, iar dacă acest produs este negativ, mişcarea este încetinită; - viteza şi accelerația sunt invarianți în raport cu schimbarea sistemului de referință; - vectorul accelerație este egal cu zero în mişcarea unui punct în care nu variază nici direcția, nici mărimea vectorului viteză (când punctul are o mişcare rectilinie şi uniformă).

7.1.4. Viteza şi acceleraţia unghiulară

În unele cazuri poziţia unui punct pe o curbă poate fi precizată cu ajutorul unui unghi θ. De exemplu în mişcarea unui punct pe un cerc (fig. 7.3), poziţia punctului A este cunoscută dacă se cunoaşte unghiul θ =θ (t) măsurat faţă de o axă fixă. Astfel, pentru a descrie mişcarea punctului A se introduc noţiunile de viteză unghiulară şi acceleraţie unghiulară.

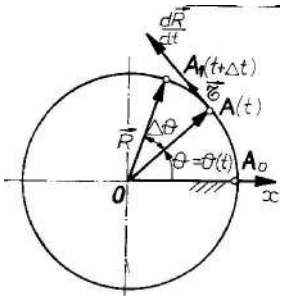


Fig. 7.3,

Dacă A şi A_1 sunt cele două poziţii succesive ale mobilului pe cercul de rază R (fig. 7.3) atunci rezultă:

- viteza unghiulară medie $\omega_m = \Delta\theta / \Delta t$, iar viteza unghiulară instantanee se obţine trecând la limită acest raport, când intervalul de timp tinde la zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}. \qquad (7.7)$$

- în mod analog se definesc acceleraţia unghiulară medie $\varepsilon = \Delta\omega / \Delta t$, şi acceleraţia unghiulară instantanee:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}. \qquad (7.8)$$

Rezultă că viteza unghiulară reprezintă variaţia unghiului descris de rază, în unitatea de timp, iar acceleraţia unghiulară reprezintă variaţia vitezei unghiulare în unitatea de timp. Unităţile de măsură sunt radiani pe secundă (rad/s) pentru viteza unghiulară şi radiani pe secundă la pătrat (rad/s^2) pentru acceleraţia unghiulară.

Ştiind că S (t) = R θ (t), se poate obţine relaţia între viteza punctului $\vec{v}$ şi viteza unghiulară $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = R\dot{\theta}\vec{\tau} = R\omega\vec{\tau}. \qquad (7.9)$$

Relaţia (7.13) arată că derivata unui vector turnant (rotitor) în raport cu timpul este un vector perpendicular pe acel vector.

Vectorul de poziţie $\vec{R}$ faţă de polul fix O este un vector constant în

mărime şi variabil în direcţie.

Dacă se alege pentru mobilul A, un nou vector de poziţie $\vec{\rho}$, cu punctul de aplicaţie în O_1 situat pe o dreaptă (Δ) perpendiculară pe planul (π) în care are loc mişcarea circulară, relaţia (7.9) devine:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \omega R\vec{\tau} = \omega\rho \sin\alpha\vec{\tau} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}. \qquad (7.10)$$

unde α reprezintă unghiul dintre vectorul de poziţie $\vec{\rho}$ şi viteza unghiulară $\vec{\omega}$, orientată după axa (Δ) în sensul dat de regula şurubului drept, astfel încât rezultatul produsului vectorial $\vec{\omega}\times\vec{\rho}$, să corespundă cu sensul vitezei punctului A.

7.1.5. Formulele lui Poisson

Se consideră un cub (fig. 7.4) având muchiile egale cu unitatea ce se roteşte cu o viteză unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul diagonalei principale OD. Acestui cub i se ataşează sistemul de referinţă cartezian cu originea în O. Vârfurile cubului notate cu A, B şi C vor avea ca vectori de poziţie tocmai versorii axelor de coordonate $\vec{i}, \vec{j}$ şi $\vec{k}$.

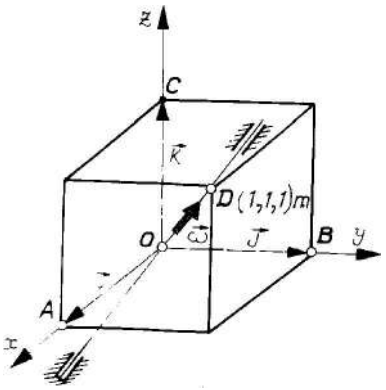


Fig. 7.4.

În baza relaţiei (7.10), vitezele acestor puncte, respectiv derivatele versorilor sistemului de referinţă în raport cu timpul sunt:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i}; \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j} =; \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}\times\vec{k}. \qquad (7.11)$$

Relaţiile (7.11) sunt cunoscute sub denumirea de formulele lui Poisson.

Dacă cubul de muchie egală cu unitatea se roteşte în jurul axei Oz, cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$, formulele lui Poisson devin:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i} = \omega\vec{k}\times\vec{i} = \omega\vec{j}; \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j} = -\omega\vec{i}; \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}\times\vec{k} = 0.$$

7.2. STUDIUL MIŞCĂRII PUNCTULUI ÎN DIFERITE SISTEME DE REFERINŢĂ

7.2.1. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate carteziene

Poziţia mobilului A pe traiectorie se stabileşte la orice moment prin intermediul vectorului de poziţie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ faţă de polul fix O. Dacă se alege un sistem de referinţă cartezian, triortogonal, drept cu originea în O (fig.7.5.), atunci vectorul de poziţie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este definit în spaţiu de trei funcţii scalare de timp, coordonatele punctului A:

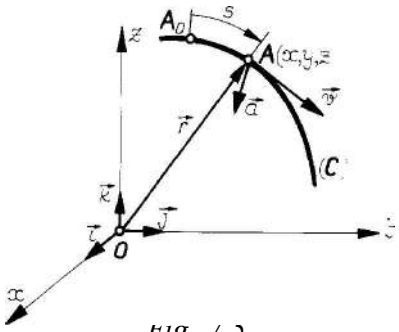


Fig. 7.5.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad (7.12)$$

Relaţiile (7.12) reprezintă ecuaţia vectorială a traiectoriei unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii axelor fixe, constanţi în timp, iar

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \qquad (7.13)$$

reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei.

Traiectoria punctului A se obţine prin eliminarea parametrului timp t între ecuaţiile parametrice; ecuaţia curbei în coordonate carteziene, rezultă sub formă implicită, ca intersecţie a două suprafeţe.

$$f_1(x, y, z) = 0; f_2(x, y, z) = 0: \qquad (7.14)$$

Viteza punctului $\vec{v}$ se determină derivând în raport cu timpul, vectorul de poziţie $\vec{r}$ din relaţia (7.12):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}, \qquad (7.15)$$

în care $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ reprezintă proiecţiile vitezei punctului A pe axele sistemului de referinţă. Deci,

$$v_x = \dot{x}(t); v_y = \dot{y}(t); v_z = \dot{z}(t).$$

Acceleraţia punctului, conform relaţiei (7.6) este:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}, \qquad (7.16)$$

unde $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ sunt proiecțiile acceleraţiei punctului pe axele de coordonate. Deci,

$$a_x = \ddot{x}(t); a_y = \ddot{y}(t); a_z = \ddot{z}(t).$$

Mărimile acestora sunt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (7.17)$$

Vectorul viteză are direcţia tangentei la traiectorie, iar vectorul acceleraţie este întotdeauna îndreptat către partea concavă a traiectoriei.

Pentru determinarea legii orare a mişcării se utilizează relaţia:

$$S = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} + C$$

în care introducând notaţiile lui Newton:

$$dx = \dot{x}dt; dy = \dot{y}dt; dz = \dot{z}dt$$

rezultă:

$$S = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt + C = \int v \cdot dt + C. \qquad (7.18)$$

7.2.2. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate cilindrice şi polare

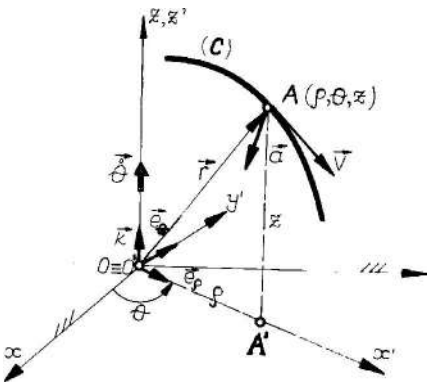


Fig. 7.6.

a) În sistemul de coordonate cilindrice, poziţia mobilului pe traiectorie este definită de următorii parametrii scalari independenţi: raza polară ρ, unghiul polar θ şi cota z (fig.7.6.), aceşti parametri fiind funcţie de timp, adică:

$$\rho = \rho(t); \theta = \theta(t); z = z(t). \qquad (7.19)$$

Relaţiile (7.19) reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului A. Eliminând

parametrul variabil timpul t între ecuațiile parametrice se obține ecuația traiectoriei sub forma implicită:

$$f_1(\rho,\theta,z)=0 \qquad f_2(\rho,\theta,z)=0. \tag{7.20}$$

Se consideră (fig. 7.6.) un sistem de referință mobil O'x'y'z', având originea O' comună cu a sistemului fix O_1, axa O'x' suprapusă cu raza polară ρ de versor $\vec{e}_\rho$, axa Oz suprapusă cu axa fixă O_1z_1 de versor $\vec{k}$ şi axa O'y ' de versor $\vec{e}_\theta$ orientat astfel încât sistemul mobil să formeze un reper drept, adică $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k})=+1$.

Astfel, vectorul de poziție al punctului A în sistemul mobil de coordonate cilindrice este:

$$\vec{r}=\rho\vec{e}_\rho+z\vec{k}. \tag{7.21}$$

Viteza punctului $\vec{v}$ se obține prin derivarea vectorului de poziție în raport cu timpul:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot\rho\vec{e}_\rho+\rho\dot{\vec{e}}_\rho+\dot z\vec{k}+z\dot{\vec{k}}=\dot\rho\vec{e}_\rho+\rho\dot\theta\vec{e}_\theta+\dot z\vec{k}, \tag{7.22}$$

unde s-a ținut seama de formulele lui Poisson (7.11):

$$\dot{\vec{e}}_\rho=\vec{\omega}\times\vec{e}_\rho=\dot\theta\vec{k}\times\vec{e}_\rho=\dot\theta\vec{e}_\theta;\dot{\vec{e}}_\theta=\dot\theta\vec{k}\times\vec{e}_\theta=-\dot\theta\vec{e}_\rho;\dot{\vec{k}}=\omega\vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Sub forma matriceală, viteza se poate scrie astfel:

$$[\vec{v}]=\begin{bmatrix}v_\rho\\ v_\theta\\ v_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\rho\\ \rho\dot\theta\\ \dot z\end{bmatrix},\text{iar}|\vec{v}|=\sqrt{(v_\rho)^2+(v_\theta)^2+(v_z)^2}.$$

unde proiecțiile vitezei punctului pe cele trei axe sunt: v_ρ - viteza radială, v_θ - viteza transversală şi v_z - viteza axială.

Accelerația punctului se obține prin derivarea vectorului viteză:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot\rho\vec{e}_\rho+\dot\rho\dot{\vec{e}}_\rho+\dot\rho\dot\theta\vec{e}_\theta+\rho\ddot\theta\vec{e}_\theta+\rho\dot\theta\dot{\vec{e}}_\theta+\ddot z\vec{k}=$$

$$=\ddot\rho\vec{e}_\rho+\dot\rho\dot\theta\vec{e}_\theta+\dot\rho\dot\theta\vec{e}_\theta+\rho\ddot\theta\vec{e}_\theta-\rho(\dot\theta)^2\vec{e}_\rho+\ddot z\vec{k}$$

deci,

$$\vec{a} = \left[\ddot{\rho} - \rho\left(\dot{\theta}\right)^2\right]\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}. \qquad (7.23)$$

Sub formă matriceală accelerația se poate scrie astfel:

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\left(\dot{\theta}\right)^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \text{ iar } |\vec{a}| = \sqrt{\left(a_\rho\right)^2 + \left(a_\theta\right)^2 + \left(a_z\right)^2},$$

unde proiecțiile accelerației punctului pe axele sistemului mobil sunt: a_ρ - accelerația radială. a_θ - accelerația transversală, a_z - accelerația axială.

b) Sistemul de coordonate polare, este un caz particular al sistemului de coordonate cilindrice. Când traiectoria punctului este o curbă plană (fig. 7.7.) poziția lui pe traiectorie se poate determina cu ajutorul coordonatelor polare:

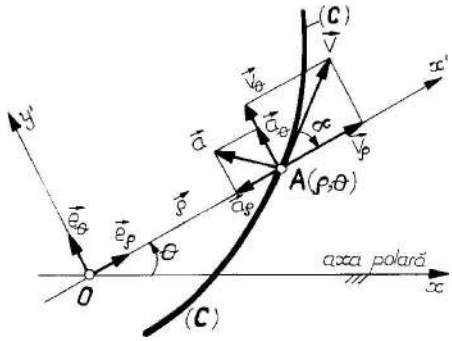


Fig. 7.7.

$$\rho = \rho(t) \text{ şi } \theta = \theta(t). \qquad (7.24)$$

Eliminând timpul între ecuațiile parametrice (7.24) rezultă ecuația traiectoriei sub formă implicită $f(\rho,\theta) = 0,$, sau explicită $\rho = \rho(\theta)$.

Viteza şi accelerația punctului rezultă din relațiile (7.22) şi (7.23) pentru cazul particular z=0:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta; \qquad (7.25)$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta. \qquad (7.26)$$

7.2.3. Mişcarea punctului în sistemul de coordonate naturale (triedrul lui Frenet)

Triedrul lui Frenet, utilizat în problemele în care traiectoria punctului este cunoscută, este un sistem de referinţă mobil, cu originea în punctul A a cărui mişcare o studiem. În figura 7.8. se consideră un punct material A în mişcare pe traiectoria (C).Poziţia punctului A pe traiectorie este definită prin coordonata curbilinie:

$$s = s(t), \qquad (7.27)$$

relaţie ce reprezintă legea orară a mişcării.

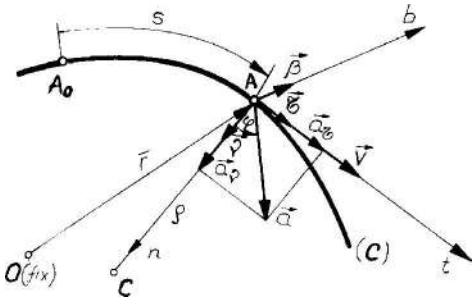


Fig. 7.8.

Acestui punct i se poate ataşa un sistem de referinţă mobil cu originea în A, având următoarele axe: - tangenta la traiectorie, At, de versor $\vec{\tau}$, având sensul pozitiv, în sensul de creştere a parametrului scalar s; - axa normală An, de versor $\vec{\nu}$, având sensul pozitiv spre centrul de curbură; - axa binormală, Ab, de versor $\vec{\beta}$, orientat astfel încât să formeze un triedru drept.

Axele triedrului mobil a lui Frenet, determină trei plane: - planul osculator, definit de tangentă şi normală; - planul tangent, definit de tangentă şi binormală; - planul normal, definit de axa normală şi binormală.

Viteza punctului se obţine derivând vectorul de poziţie în raport cu timpul, prin intermediul coordonatei curbilinii s:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau}, \qquad (7.28)$$

unde $\vec{\tau} = d\vec{r}/ds$, relaţie cunoscută din geometria diferenţială. Relaţia (7.28) arată că vectorul viteză are direcţia tangentei la traiectorie, sensul mişcării şi mărimea egală cu derivata în raport cu timpul a coordonatei curbilinii $s = s(t)$.

Acceleraţia punctului în coordonate naturale se determină prin

derivarea în raport cu timpul a relației (7.28):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\dot{\vec{\tau}}, \text{ dar } \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{\nu} \cdot \dot{s},$$

relație stabilită în geometria analitică, în care ρ reprezintă raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat.

Astfel, rezultă:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{\nu} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\nu}. \tag{7.29}$$

Se observă că vectorul accelerație, este conținut în planul osculator. Proiecțiile accelerației pe axele triedrului lui Frenet sunt:

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_\tau \\ a_\nu \\ a_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \frac{v^2}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{iar} [\vec{a}] = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \tag{7.30}$$

Componenta $\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \dot{v}\vec{\tau}$, a accelerației se numeşte accelerație tangențială şi poate fi pozitivă sau negativă. Această componentă a accelerației apare datorită variației mărimii vitezei.

Componenta $\vec{a}_\nu = (\dot{s}^2/\rho)\vec{\nu} = (v^2/\rho)\vec{\nu}$, se numeşte accelerație normală şi este întotdeauna pozitivă, adică îndreptată către centrul de curbură al traiectoriei. Accelerația tangențială este o consecință a variației direcției vectorului viteză. În consecință, în orice mişcare curbilinie, accelerația normală este diferită de zero. Singura mişcare în care accelerația este nulă este mişcarea rectilinie şi uniformă.

Dacă viteza este constantă, accelerația tangențială este nulă, iar mişcarea se numeşte uniformă. Dacă, $\vec{v} \cdot \vec{a}_\tau > 0$, mişcarea este uniform accelerată, iar dacă $\vec{v} \cdot \vec{a}_\tau < 0$, mişcarea este uniform încetinită.

7.2.4. Calculul razei de curbură a traiectoriei

Expresia (7.29) a accelerației în triedrul lui Frenet permite determinarea razei de curbură ρ a traiectoriei în funcție de elementele cinematice ale mişcării: viteza $\vec{v}$ şi accelerația $\vec{a}$:

Dacă: $a^2 = \dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$, rezultă $\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 + \dot{v}^2}}$. (7.31)

O altă metodă vectorială de explicitare a razei de curbură, se obține făcând produsul vectorial dintre $\vec{v}$ şi $\vec{a}$:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \\ v & 0 & 0 \\ \dot{v} & \frac{v^2}{\rho} & 0 \end{vmatrix} = \frac{v^3}{\rho}\vec{\beta}, \text{ deci } \rho = \frac{v^3}{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|}. \quad (7.32)$$

Relaţia (7.32) permite să aflăm raza de curbură a traiectoriei atunci când se cunosc expresiile analitice ale vitezei $\vec{v}$ şi acceleraţiei $\vec{a}$ în coordonate carteziene şi anume:

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{3/2}}{\left[\left(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}\right)^2 + \left(\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (7.33)$$

În cazul când traiectoria este plană $\left(\dot{z} = \ddot{z} = 0\right)$ şi se cunosc ecuaţiile parametrice ale traiectoriei x = x (t) şi y = y (t), raza de curbură este:

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}\right|}. \quad (7.34)$$

Dacă ecuaţia traiectoriei plane este dată sub formă explicită y = y(x), în coordonate carteziene, se înlocuiesc derivatele în raport cu timpul $\dot{y}$ şi $\ddot{y}$ în expresia (7.34):

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' \cdot \dot{x}; \ddot{y} = y'' \cdot \dot{x}^2 + y' \cdot \ddot{x},$$

Deci:

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + y'^2\dot{x}^2\right)^{3/2}}{y''\dot{x}^3 + y'\ddot{x}\dot{x} - y'\ddot{x}\dot{x}} = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''\right|}. \quad (7.35)$$

7.3. MIŞCĂRI PARTICULARE ALE PUNCTULUI MATERIAL

7.3.1. Mişcarea uniformă a punctului

Mişcarea uniformă este mişcarea în decursul căreia modulul vitezei rămâne constant:

$$v = v_O = \text{cons tan t} \tag{7.36}$$

Traiectoria mişcării uniforme a punctului poate fi rectilinie sau curbilinie.În figura 7.9. s-a reprezentat o traiectorie curbilinie a mobilului A. S-a notat cu O originea spaţiului iar cu A_O originea timpului. În cazul mişcării uniforme, pe o traiectorie curbilinie, acceleraţia tangenţială a mobilului este nulă:

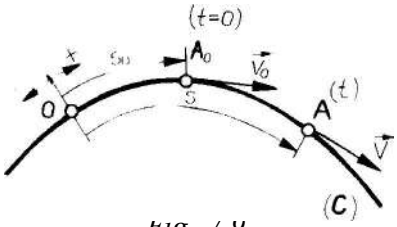


Fig. 7.9.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \tag{7.37}$$

iar acceleraţia normală este diferită de zero.

Ecuaţia orară a mişcării se obţine prin integrarea ecuaţiei $ds = v_O dt$, rezultând:

$$\int_{s_O}^{s} ds = \int_{0}^{t} v_O dt \text{ sau } s = s_O + v_O t. \tag{7.38}$$

Dacă mobilul trece prin origine timpului A_O, înainte de începerea cronometrării lui, cu t_1 secunde, legea orară este: $s = s_O + v_O(t + t_1)$, iar dacă mobilul trece prin originea timpului A_O, după t_2 secunde de la începerea cronometrării timpului, legea orară are forma: $s = s_O + v_O(t - t_2)$.

Diagramele mişcării ilustrează variaţia în timp a legilor de mişcare (7.39), (7.40) şi (7.41), adică reprezentarea grafică a ecuaţiilor de mişcare. În figura 7.10. s-au reprezentat grafic legile mişcării uniforme a punctului. Se observă că diagrama spaţiului este o dreaptă de pantă $m = tg\theta = v_O$,

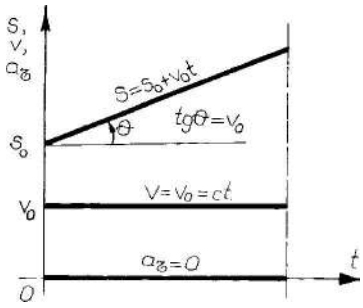


Fig. 7.10.

diagrama vitezei este o dreaptă paralelă cu axa timpului, iar diagrama acceleraţiei tangenţiale este reprezentată chiar de axa absciselor.

7.3.2. Mişcarea uniform variată

Mişcarea uniform variată a punctului este mişcarea în care modulul vitezei variază liniar cu timpul. Din definiţia acestei mişcări rezultă că acceleraţia tangenţială a punctului rămâne constantă în timpul mişcării:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{cons tan t.} \tag{7.39}$$

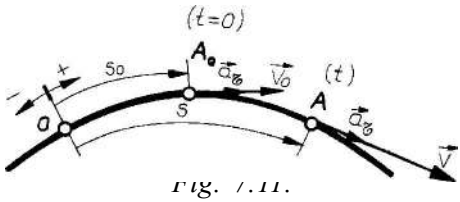


Fig. 7.11.

Relaţia (7.39) reprezintă legea acceleraţiei tangenţiale a punctului în mişcare uniform variată pe traiectorie curbilinie. Dacă traiectoria este rectilinie acceleraţia tangenţială devine acceleraţie fără indice. În figura 7.11. s-a reprezentat un punct A în mişcare uniform variată pe o traiectorie curbilinie. Dacă O reprezintă originea spaţiului şi A_O originea timpului, condiţiile iniţiale ale mişcării sunt: la $t = 0$, $s = s_O$ şi $v = v_O$.

Prin integrarea ecuaţiei (7.39) rezultă legea vitezei punctului:

$$\int_{v_O}^{v} dv = \int_0^t a_\tau dt \text{ sau } v = v_O + a_\tau t. \tag{7.40}$$

Ştiind că $v = ds/dt$, prin integrare rezultă legea orară a mişcării sau legea spaţiului:

$$\int_{s_O}^{s} ds = \int_0^t v dt = (v_O + a_\tau t)dt, \text{ deci:}$$

$$s = s_O + v_O t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{7.41}$$

Mişcarea uniform variată poate fi uniform accelerată când $\vec{v}\cdot\vec{a}_\tau > 0$ şi uniform încetinită când $\vec{v}\cdot\vec{a}_\tau < 0$. Astfel, pentru mişcarea uniform accelerată, când acceleraţia are acelaşi sens cu viteza punctului legile de mişcare scrise grupat sunt:

$$a_\tau = ct. > 0; v = v_O + a_\tau t; s = s_O + v_O t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \qquad (7.42)$$

În cazul mişcării uniform încetinite (întârziată), când cei doi vectori $\vec{v}$ şi $\vec{a}_\tau$ au sensuri diferite, legile de mişcare sunt:

$$a_\tau = ct. < 0; v = v_O - a_\tau t; s = s_O + v_O t - a_\tau \frac{t^2}{2}. \qquad (7.43)$$

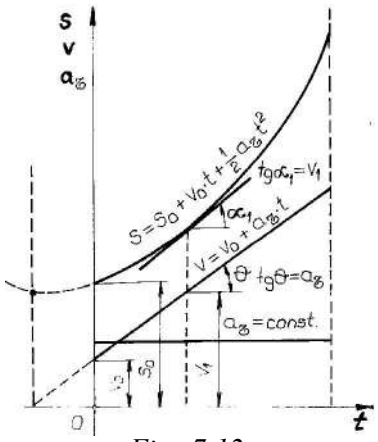


Fig. 7.12.

În figura 7.12. sunt trasate (diagramele mişcării) curbele de variaţie ale spaţiului, vitezei şi acceleraţiei în funcţie de timp, în cazul mişcării uniform accelerate. Diagrama spaţiului este o parabolă în care, tangenta într-un punct reprezintă mărimea vitezei în acel moment. Uneori în aplicaţii este utilă folosirea relaţiei lui Galilei. Ea se obţine prin eliminarea timpului între legea vitezei (7.40) şi legea spaţiului (7.54):

$$v^2 = v_O^2 + 2a_\tau(s - s_O). \qquad (7.44)$$

Diagramele mişcării au aplicaţii utile în rezolvarea problemelor privind locul şi timpul de întâlnire al mobilelor ce se mişcă pe aceiaşi traiectorie sau pe traiectorii paralele (cazul trenurilor şi al autovehiculelor).

7.3.3. Mişcarea circulară

Mişcarea circulară este mişcarea punctului având ca traiectorie un cerc. Mişcarea punctului pe cerc poate fi studiată în oricare din sistemele de referinţă prezentate în paragrafele precedente. În cele ce urmează mişcarea circulară va fi studiată în coordonate naturale.

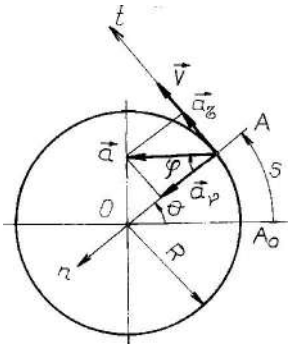


Fig. 7.13.

Poziţia la un moment dat a punctului A pe traiectoria circulară de rază R (fig.7.13) poate fi stabilită cu ajutorul parametrului geometric variabil, unghiul θ măsurat între raza poziţiei iniţiale A_O şi cea a poziţiei cerute A. Legea de mişcare este deci:

$\theta = \theta(t)$.

Spaţiul S parcurs de mobilul A faţă de originea A_O se poate exprima în funcţie de spaţiul unghiular $\theta = \theta(t)$ astfel:

$$s = s(t) = R \cdot \theta(t). \qquad (7.45)$$

Relaţia (7.45) reprezintă ecuaţia orară a mişcării circulare.

Utilizând expresiile vitezei (7.28) şi acceleraţiei (7.29) în sistemul de coordonate naturale sau intrinseci rezultă:

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = R\dot{\theta}\vec{\tau}; |\vec{v}| = R\dot{\theta};$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{v} = R\ddot{\theta}\vec{\tau} + R\dot{\theta}^2\vec{v}; |\vec{a}| = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}, \qquad (7.46)$$

unde $\dot{\theta} = \omega$ este viteza unghiulară a razei care urmăreşte mobilul în mişcarea lui pe cerc; $\ddot{\theta} = \varepsilon$ - acceleraţia unghiulară; r = R - raza cercului. Cu aceste notaţii expresiile vitezei şi componentele acceleraţiei sunt:

$$v = R\omega; a_\tau = R\varepsilon; a_v = R\omega^2; |\vec{a}| = R\sqrt{\varepsilon^3 + \omega^4}. \qquad (7.47)$$

Direcţia acceleraţiei totale $\vec{a}$ faţă de axa normală, ce trece prin centrul cercului, se determină cu relaţia:

$$tg\varphi = \frac{a_\tau}{a_v} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (7.48)$$

În cazul particular al mişcării circulare uniforme avem:

$$\varepsilon = 0, \omega = ct. \text{ şi } \theta = \omega t. \tag{7.49}$$

În aceste condiţii, componenta tangenţială a acceleraţiei este nulă $a_\tau = R\varepsilon = 0,$ iar acceleraţia punctului va avea direcţia razei şi sensul îndreptat spre centrul cercului:

$$\vec{a} = a_v \vec{v} = \frac{v^2}{R}\vec{v} = R\omega^2\vec{v}. \tag{7.50}$$

În mişcarea circulară uniformă, viteza unghiulară ω poate fi calculată şi în funcţie de numărul n de rotaţii complete efectuate de punct într-un minut (turaţia), cu ajutorul relaţiei:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \tag{7.51}$$

Derivând de două ori în raport cu timpul, s =s(t), spaţiul parcurs de punctul A pe cercul de rază R, rezultă relaţiile între mărimile cinematice liniare şi cele unghiulare, astfel:

$$s = R\theta; \dot{s} = v = R\omega; \ddot{s} = a_\tau = R\varepsilon,$$

sau

$$\frac{s}{\theta} = \frac{v}{\omega} = \frac{a_\tau}{\varepsilon} = R. \tag{7.52}$$

Relaţiile (7.52) exprimă faptul că mărimile cinematice liniare sunt proporţionale cu cele unghiulare, factor de proporţionalitate fiind raza cercului R.

Legile mişcarii circulare în elemente cinematice unghiulare, se obţin cunoscând corespondenţa între elementele cinematice liniare şi cele unghiulare (relaţiile 7.69):

- mişcarea circulară uniformă:

$$\varepsilon = 0; \omega = \omega_O = ct.; \theta = \theta_O + \omega_O t; \tag{7.53}$$

- mişcarea circulară uniform accelerată $(\vec{\omega} \cdot \vec{\varepsilon} > 0)$:

$$\varepsilon = \varepsilon_O = ct. > 0; \omega = \omega_O + \varepsilon_O t; \theta = \theta_O + \omega_O t + \varepsilon_O \frac{t^2}{2}; \tag{7.54}$$

- mişcarea circulară uniform încetinită $(\vec{\omega} \cdot \vec{\varepsilon} < 0)$:

$$\varepsilon = \varepsilon_O = ct. < 0; \omega = \omega_O - \varepsilon_O t; \theta = \theta_O + \omega_O t - \varepsilon_O \frac{t^2}{2}; \tag{7.55}$$

Relația lui Galilei în elemente unghiulare, obținută prin eliminarea timpului între legea spațiului unghiular şi a vitezei unghiulare, este:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta + \theta_0). \tag{7.56}$$

7.3.4. Mişcarea oscilatorie armonică

Mişcarea oscilatorie armonică este cea mai simplă mişcare periodică. Mişcarea periodică este mişcarea limitată spațial, la care toate elementele cinematice ale mişcării (poziție, viteză, accelerație) se repetă după acelaşi interval minim de timp, T, numit perioadă. O asemenea mişcare se exprimă printr-o funcție periodică de timp, de forma:

$$q(t) = q(t + T), \tag{7.57}$$

unde q reprezintă un parametru geometric, distanță sau unghi, ce defineşte poziția mobilului.

Parametrul geometric ce defineşte poziția mobilului în cazul mişcării oscilatorii armonice, poate fi exprimat printr-un polinom de gradul întâi în sinusul sau/şi cosinusul unei funcții liniare de timp.

Cele mai utilizate funcții periodice (legi de mişcare) pentru a descrie mişcarea oscilatorie sunt:

$$x = a\sin(\omega t + \varphi); y = a\cos(\omega t + \psi). \tag{7.58}$$

În aceste relații apar următoarele **mărimi caracteristice:**

x, y - poartă numele de **elongație** şi reprezintă distanța la un moment dat dintre mobilul respectiv şi centrul de oscilație;

a - este **amplitudinea** mişcării şi reprezintă valoarea maximă a elongației;

ω - **pulsația** sau frecvența circulară şi reprezintă numărul de oscilații efectuate în 2π unități de timp;

(ω t + φ) - **unghiul de fază** sau faza, precizează poziția mobilului la timpul t;

φ, ψ - faza inițială, este faza la momentul t = 0.

Ştiind că funcțiile sinus şi cosinus sunt periodice din 2π în 2π, şi au acelaşi interval minim de timp T, numit **perioadă**, se obține legătura între pulsație, perioadă şi frecvență:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \qquad (7.59)$$

unde f = 1/T este **frecvența** şi reprezintă numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp.

Considerând legea de mişcare x = a sin (ω t + φ), prin derivare în raport cu timpul se obțin legile vitezei şi acceleraţiei:

$$\dot{x} = a\omega\cos(\omega t + \varphi);\ \ \ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (7.60)$$

Reprezentatre grafică a acestor trei funcții de variabilă independentă t este redată în figura 7.14.

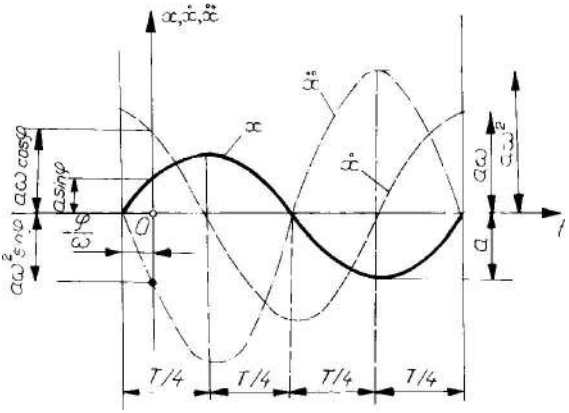


Fig. 7.14.

7.4 PROBLEME REZOLVATE

1. Mişcarea în spațiu a unui punct material este definită de vectorul de poziție $\vec{r} = (m_1 t^2 + p_1)\vec{i} + (m_2 t^2 + p_2)\vec{j} + (m_3 t^2 + p_3)\vec{k}$ unde t este timpul iar $m_1, m_2, m_3, p_1, p_2, p_3$ constante numerice. Să se determine: traiectoria punctului, viteza şi hodograful vitezei, acceleraţia şi hodograful acceleraţiei precum şi legea orară a mişcării.

Rezolvare. - Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$x = m_1 t^2 + p_1; y = m_2 t^2 + p_2; z = m_3 t^2 + p_3.$

Eliminând timpul între aceste ecuații, rezultă traiectoria:

$$\frac{x - p_1}{m_1} = \frac{y - p_2}{m_2} = \frac{z - p_3}{m_3}$$

Traiectoria este o dreaptă ce trece prin punctul $P(p_1, p_2, p_3)$ de vector de poziție: $\vec{r}_p = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}$ şi este coliniară cu vectorul: $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}.$.

- Proiecțiile vitezei punctului sunt: $\dot{x} = 2m_1 t, \dot{y} = 2m_2 t, \dot{z} = 2m_3 t$ deci: $\vec{v} = 2m_1 t\vec{i} + 2m_2 t\vec{j} + 2m_3 t\vec{k} = 2\vec{m}t$ şi mărimea $v = 2mt$.

Hodograful mişcării este: $\frac{\dot{x}}{2m_1} = \frac{\dot{y}}{2m_2} = \frac{\dot{z}}{2m_3}$, o dreaptă ce trece prin originea sistemului $O\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ şi este coliniară cu vectorul $\vec{m}$.

- Proiecțiile acceleraţiei mobilului sunt: $\ddot{x} = 2m_1; \ddot{y} = 2m_2; \ddot{z} = 2m_3$, deci: $\vec{a} = 2m_1\vec{i} + 2m_2\vec{j} + 2m_3\vec{k} = 2\vec{m}$ şi mărimea $a = 2m = const.$

Hodograful acceleraţiei este un punct definit de vectorul de poziție $\vec{r} = 2\vec{m}$, în sistemul $O\ddot{x}\ddot{y}\ddot{z}$.

- Legea orară a mişcării este: $s = \int v \cdot dt + s_O = \int 2mt \cdot dt + s_O =$

$= 2mt^2 + s_O$, unde m este valoarea numerică a vectorului $\vec{m}$.

2. Bara AB se roteşte cu viteză unghiulară constantă ω_O în jurul articulației O (fig. 7.15).

În timpul mişcării barei, punctul C situat la distanța a față de capătul A, descrie cercul de rază R. Bara alunecă în timpul mişcării în manşonul (1). Să se determine în coordonate polare: a) Ecuația traiectoriei punctului A (curba "melcul lui Pascal"); b) componentele vitezei şi acceleraţiei punctului A.

Rezolvare.

a) Ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului A (r, q) sunt:

$\theta = \omega_O t;\ \rho = OA = OC + CA = 2R\cos\omega_O t + a;$

Ecuația traiectoriei sub formă explicită este:

$\rho = 2R\cos\theta + a.$

b) Componentele vitezei punctului sunt:

$v_\rho = \dot{\rho} = -2R\omega_O \sin\omega_O t;$

$v_\theta = \rho\dot{\theta} = (2R\cos\omega_O t + a)\cdot\omega_O$

Componentele acceleraţiei punctului sunt:

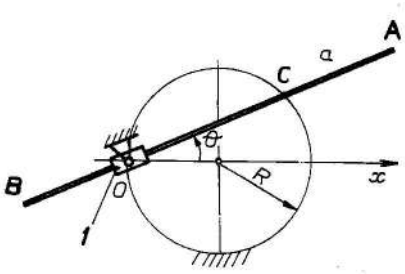


Fig. 7.15

$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -2R\omega_O^2\cos\omega_O t - (2R\cos\omega_O t + a)\omega_O^2 =$

$= -\omega_O^2(4R\cos\omega_O t + a);$

$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = -4R\omega_O^2\sin\omega_O t.$

3. Un punct A se deplasează pe parabola de ecuație $y = 3x^2 + 5,$ hodograful mişcării în raport cu punctul O fiind parabola $\dot{y} = 3\dot{x}^2$. La momentul t = 0, mobilul se află în punctul $A_O(1, 8)$. Să se determine: a) viteza mobilului; b) componentele acceleraţiei, normală şi tangenţială în A.

Rezolvare: a) Se derivează ecuația traiectoriei $y = 3x^2 + 5,$ în raport cu timpul, rezultând:

$\frac{dy}{dt} = 6x\frac{dx}{dt}, \text{dar} \frac{dy}{dt} = 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, prin eliminarea derivatei $\frac{dy}{dt}$, între cele două relaţii se obţine:

$$3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 6x\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\left(3\frac{dx}{dt} - 6x\right) = 0.$$

Sunt posibile două cazuri:

I. $\frac{dx}{dt}=0$, în acest caz: x=ct. şi y=ct.;

II. $\frac{dx}{dt}\neq 0$. adică $\frac{dx}{dt}=2x$ sau $\frac{dx}{x}=2dt$.

Integrând ecuaţia de mai sus rezultă:

$\ln x=2t+\ln\alpha$, deci $mx=\alpha e^{2t}$ şi $y=3\alpha^2e^{4t}+5$

unde a este constantă de integrare.

Din condiţia $t=0, A_O(1,8)$ rezultă a = 1.

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$x=e^{2t}; y=3e^{4t}+5,$

mişcarea punctului A se efectuează după o lege exponenţială.

Derivând relaţiile (8.45) rezultă componentele vitezei şi viteza $\vec{v}$:

$v_x=\dot{x}=2e^{2t}; v_y=\dot{y}=12e^{4t}$ iar $\vec{v}=2e^{2t}\vec{i}+12e^{4t}\vec{j}.$

b) Componentele acceleraţiei rezultă derivând relaţiile :

$a_x=\ddot{x}=4e^{2t}; a_y=\ddot{y}=48e^{4t}$ iar $\vec{a}=4e^{2t}\vec{i}+48e^{4t}\vec{j}.$

Modulul vitezei şi acceleraţiei sunt:

$v=\sqrt{4e^{4t}+144e^{8t}}, a=\sqrt{16e^{4t}+48^2e^{8t}}.$

Componenta tangenţială a acceleraţiei:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{4e^{2t}\left(1+108\ e^{4t}\right)}{\left(1+36\ e^{4t}\right)^{1/2}}.$$

Componenta normală a acceleraţiei:

$$a_v=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{\left(16e^{4t}+48^2e^{8t}\right)^2-\frac{16e^{4t}\left(1+108e^{4t}\right)^2}{1+36e^{4t}}}.$$

4. Un mobil având viteza v_O constantă pătrunde într-un mediu rezistent în care este supus unei acceleraţii $a=-kv^2$, unde k este o

constantă iar v este viteza instantanee. Să se determine: a) legea vitezei mobilului v (t) dacă la $t = 0,\ v = v_O$ b) legea spațiului x(t), luând ca origine a timpului şi a spațiului momentul în care mobilul pătrunde în mediu; c) viteza mobilului în funcție de spațiul x parcurs, v (x) (fig. 7.16).

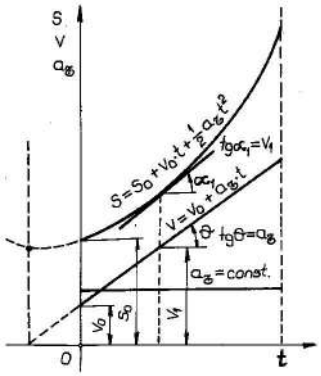


Fig. 7.16

Rezolvare. a) Dacă $a = -kv^2$ rezultă ecuația: $-\frac{dv}{v^2} = kdt$, iar prin integrare rezultă: $\frac{1}{v} = kt + C$. Pentru $t = 0, v = v_O$ iar

$$C = \frac{1}{v_O},\ \text{deci}\ \frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_O},$$

$$v(t) = \frac{v_O}{1 + kv_O t}.$$

b) Ecuația de mişcare se obține din legea vitezei:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_O}{1 + kv_O t},\quad \text{notăm}\quad z = 1 + kv_O t,\ dz = kv_O dt.$$

Deci, $dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{dz}{z}$, care prin integrare rezultă:

$$x(t) = \frac{1}{k}\ln z - \frac{1}{k}\ln C,\ \text{pentru}\ t = 0,\ x = 0,\ \text{se obțbți}\ :C = 1.$$

În final:

$$x(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_O t).$$

c) Legea v = v (x) se poate obține direct prin eliminarea timpului între relațiile :

$x = \frac{1}{k}\ln\frac{v_O}{v}$ sau $\frac{v_O}{v} = e^{kx}$, în final $v = v_O e^{-kx}$.

5. Pe o traiectorie oarecare AB se mişcă două puncte materiale M_1 şi M_2. Punctul M_1 trece prin A spre B, uniform cu v_1 = 60 m/s iar M_2 trece prin B cu 5 secunde mai târziu spre A, uniform accelerat având v_2 = 140 m/s şi $a_\tau = 20 m/s^2$. Lungimea traiectoriei fiind AB = 3300 m, să se determine analitic şi grafic timpul şi locul întâlnirii.

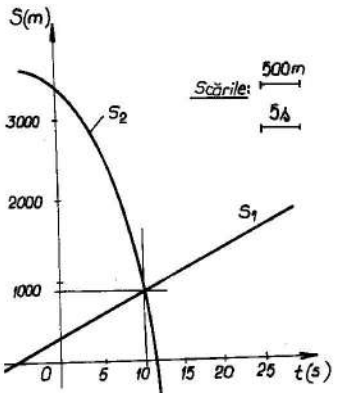


Fig. 7.17

Rezolvare. Se alege originea spaţiului în A, iar sensul pozitiv de la A spre B şi originea timpului momentul când M_2 trece prin B. Legile orare ale mişcării în aceste condiţii sunt:

$$(M_1)s_1 = 60(t+5);\ (M_2)s_2 = \frac{1}{2}20t^2 - 140t + 3300.$$

Punând condiţia ca $s_1 = s_2$, rezultă: $t^2 + 20t - 300 = 0$ de unde $t_{1,2} = 10 sec.$ şi $s_{1,2} = 900 m$. Pentru trasarea prin puncte a legii spaţiului s_2 se folosesc valorile din tabelul alăturat:

t	0	5	10	12
S	3300	2350	500	0

Cele două legi de mişcare $s_1(t)$ şi $s_2(t)$ s-au reprezentat în figura 7.17.

Observaţie. Dacă se alege originea timpului în momentul când M_1 trece prin A, legile de mişcare sunt:

$(M_1)_1 = 60t;$

$$(M_2)s_2 = \frac{1}{2}20(t-5)^2 - 140(t-5) + 330.$$

Din condiția $s_1 = s_2$ rezultă $t^2 + 10t - 375 = 0$, de unde $t_{1,2} = 15\text{sec}.$ şi $s_{1,2} = 900\text{m}.$

6. Un punct material se deplasează pe un cerc de rază R = 4m cu accelerația tangențială $a_\tau = 3\text{m}/\text{s}^2$ având la timpul t = 1s accelerația totală $a = 5\text{m}/\text{s}^2$. Să se determine:

a) accelerația normală a_ν la t = 1s; b) viteza inițială v_O; c) viteza la timpul t = 1s; c) spațiul parcurs în timp de 5s; e) numărul total de rotații realizat în 10s.

Rezolvare. a) Accelerația normală: $a_\nu^2 = a^2 - a_\tau^2 = 25 - 9 = 16.$ Deci $a_\nu = 4\text{m}/\text{s}^2$. b) Viteza inițială se determină ştiind valoarea accelerației normale:

$$a_\nu = \frac{v^2}{R} = \frac{(a_\tau t + v_O)^2}{R};\ \text{Deci}\ 4 = \frac{(3\cdot 1 + v_O)^2}{4} \Rightarrow v_O = 1\text{m}/\text{s}.$$

c) Viteza la timpul t = 1s. Legile de mişcare ale punctului sunt:
- în elemente liniare:
- în elemente unghiulare:

$$a_\tau = 3\text{m}/\text{s}^2 \qquad \varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{3}{4}\text{rad}/\text{s}^2$$

$$v = 1 + 3t \qquad \omega = \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}$$

$$S = t + 3\frac{t^2}{2} \qquad \theta = \frac{3t^2}{8} + \frac{1}{4}t$$

la $t = 1\text{s}, v = 1 + 3\cdot 1 = 4\text{m}/\text{s}.$

d) Spațiul parcurs în timp de 5 sec; $S = 5 + \frac{3\cdot 25}{2} = 42.5\text{m}.$

e) Numărul total de rotaţii efectuat în timp de 10 secunde;

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3}{8}\cdot 10^2 + \frac{1}{4}\cdot 10\right) = \frac{85}{8\cdot 3{,}14} = 3{,}38\text{rot}.$$

7. Paletele unei turbine aflate iniţial în repaus sunt acţionate de un curent de aer care le imprimă o mişcare uniform accelerată. După 4 sec. de la începutul mişcării paletele au o turaţie n = 5 rot/sec. Se cere: a) viteza şi acceleraţia unui punct de pe paletă situat la 0,2 m faţă de axă, după trei secunde de la pornire; b) numărul total N de rotaţii efectuat de paletă după 4 secunde de la pornire.

Rezolvare. a) Legile de mişcare ale paletei în elemente unghiulare sunt: $\varepsilon = \text{ct.} > 0;$ $\omega = \varepsilon t; \theta = \varepsilon\frac{t^2}{2}.$ La $t = 4\text{s}, \omega = 2\pi n_O = 2\pi 5 = 10\pi\text{rad/sec}.$ Acceleraţia unghiulară $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{10\pi}{4} = 7{,}85\text{rad/s}^2.$

La $= 3\text{s}, v = \omega R = \varepsilon t R = 7{,}85\cdot 3\cdot 0{,}2 = 4{,}71\text{m/s};$ acceleraţia normală $a_v = \frac{v^2}{R} = \frac{4{,}71^2}{0{,}2} = 110{,}92\text{m/s}^2$ iar acceleraţia tangenţială $a_\tau = \varepsilon R = 7{,}85\cdot 0{,}2 = 1{,}57\text{m/s}^2$

Deci acceleraţia totală va fi: $a = \sqrt{a_v^2 + a_\tau^2} = 110{,}93\text{m/s}^2.$

b) Numărul total de rotaţii efectuat în 4 secunde: Ştiind că $\theta = 2\pi N$ rezultă $N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\varepsilon\cdot t^2}{4\pi} = \frac{7{,}85\cdot 4^2}{4\cdot 3{,}14} = 10$ rot

8. Un punct material M se mişcă pe o traiectorie oarecare după legea spaţiului $s = 5 + 2\sin 314t + 2\sqrt{3}\cos 314t(\text{m})$. Să se calculeze: a) frecvenţa şi perioada; b) amplitudinea şi defazajul; c) viteza şi acceleraţia tangenţială maximă.

Rezolvare. a) Cele două funcţii trigonometrice sunt la puterea întâia şi au acelaşi argument. Mişcarea este oscilatorie armonică. Legea spaţiului se restrânge sub forma:

$s = 5 + 2\left(\sin 314t + \sqrt{3}\cos 314t\right)$, înlocuind $\sqrt{3} = \text{tg}\varphi$, rezultă:

$$s = 5 + 2\left(\sin 314t + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos 314t\right) = 5 + 4\sin(314t + \varphi),$$

unde $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Deci frecvenţa este $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50\text{Hz.}$, perioada fiind $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\text{s.}$

b) Amplitudinea este A = 4 m, şi defazajul $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

c) Viteza şi acceleraţia tangenţială maximă:

$$\dot{s} = v = 314 \cdot 4\cos\left(314t + \frac{\pi}{3}\right), v_{max} = 400\pi\,\text{m/s};$$

$$\ddot{s} = a_{\tau} = -314^2 \cdot 4\sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right), a_{\tau_{max}} = 4 \cdot 10^4\pi\,\text{m/s}^2.$$

9. În figura 7.18 este reprezentat mecanismul bielă manivelă utilizat la presele de forjat.

Se cunoaşte lungimea manivelei OA = a, lungimea bielei AB = b şi viteza unghiulară a manivelei w = ct. Să se determine expresiile vitezei şi acceleraţiei punctului B, în funcţie de unghiul a şi l = a/b.

Rezolvare. Mişcarea punctului B este oscilatorie şi rectilinie. Luând ca punct de referinţă articulaţia O, legea orară a mişcării este:

$y_B = OA' + A'B = a\cos\alpha + b\cos\psi = a\cos\alpha + b\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\alpha}$,

deoarece

$a\sin\alpha = b\sin\psi \Rightarrow \cos\psi = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\alpha}$.

Pentru o formulă aproximativă, se ştie că:

$$1-(\lambda\sin\alpha)^2=1-\frac{1}{2}(\lambda\sin\alpha)^2-\frac{1}{24}(\lambda\sin\alpha)^4\ldots$$

este o serie convergentă pentru $(\lambda\sin\alpha)^2<1$.

Pentru raportul l = 1/5 mai des utilizat şi valoarea maximă sin a = 1, rezultă:

$\sqrt{1-\frac{1}{25}}=1-0{,}02-0{,}0002-\ldots$, ceea ce ne arată că seria este rapid convergentă şi deci pentru aplicaţii practice putem să ne limităm la primii doi termeni şi în acest fel rezultă formula aproximativă pentru legea orară:

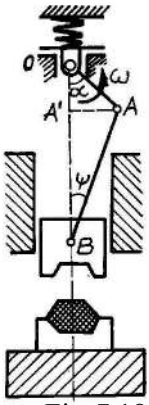


Fig. 7.18

$$y_B=a\cos\alpha+b\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha\right),\ \text{unde}\ \alpha=\omega\cdot t.$$

Legea vitezei punctului B:

$$v_B=\dot{y}_B=-a\omega\left(\sin\alpha+\frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right).$$

Legea acceleraţiei punctului B:

$$a_B=\ddot{y}_B=-a\omega^2(\cos\alpha-\lambda\cos 2\alpha).$$

7.5. PROBLEME PROPUSE

1. Un punct material plecând din origine, se mişcă pe parabola de ecuaţie $y=\frac{x^2}{6}$ cu viteza constantă v = 5 m/s. Să se determine acceleraţia punctului în momentul când abscisa este x = 4 m.

R. $a=a_\nu=1{,}8\,m/s^2$

2. Ecuaţia vectorială a traiectoriei unui punct material este

$\vec{r} = 4\cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j} + 3t\vec{k}\,(m)$. Să se determine viteza, accelerația și raza de curbură a traiectoriei mobilului.

R. v = 5 m/s; a = 4 m /s^2; r = 6,25 m.

3. Pe un cerc de rază R = 0,1 m se deplasează un punct după legea S = 4 t + 2 t^2 (cm). Să se calculeze mărimea vitezei și accelerației la timpul t = 4 s.

R. v = 0,2 m/s; $a = 0.04\sqrt{101} \cong 0.4 m/s^2$.

4. Un motor electric pornește din repaus în mișcare uniform accelerată și în 10 s ajunge la turația de regim n_O = 300 rot/min. Cunoscând că rotorul acestui motor are diametrul D = 0,2 m, să se afle: a) viteza și accelerația unui punct M de pe periferia rotorului la 4 s de la pornire precum și în mișcare de regim; b) câte rotații a efectuat rotorul în cele 10 s cât a durat perioada de demarare a motorului.

R. a) v = 1,256 m/s; a = 1,96 m/s^2; v = 3,14 m/s; a = 98,5 m/s^2;
b) N = 25 rotații.

5. Un punct material se mișcă pe o traiectorie plană de ecuație y = b x^2, unde b = const. >0, cu o viteză constantă de mărime v_O. Determinați valoarea maximă a accelerației punctului și figurați pe traiectoria lui vectorul accelerație maximă.

R. $a_{max} = a^{v}_{max} = v^2 / \rho_{min} = 2bv_O^2$

6. Un patinator aleargă cu o viteză constantă în jurul unui stadion parcurgând lungimea L = 1000 m într-un minut și 15 secunde. Considerând că traiectoria pe care se deplasează patinatorul este o curbă plană, ce se compune din două porțiuni drepte și două porțiuni curbe de rază R = 30 m, determinați valorile maximă și minimă a accelerației patinatorului.

R. a_{min} = 0; a_{max} = 5,92 m/s^2.

7. Mișcarea unui punct în plan este descrisă de ecuațiile x = at cos ωt, y =at sin ωt, unde a = const. > 0, ω =const. > 0. Determinați: a) raza de curbură a traiectoriei la timpul t = 0 și la t $\to$ Ą; b) traiectoria punctului

în coordonate polare; c) proiecțiile vitezei şi acceleraţiei punctului în coordonate polare.

R. a) $\rho(0)=\frac{a}{2\omega}$; $\rho(\infty)=\infty$; b) $r=\frac{a}{\omega}\theta$, spirala lui Arhimede;

c) $v_p=$; $v_\theta=a\omega t$; $a_p=-a_\omega^2 t$; $a_\theta=2a\omega$

8. Un punct se mişcă după următoarele legi x = a ch(k t), y = b sh(k t), unde a, b şi k sunt constante pozitive. Determinaţi traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului în funcţie de x şi y.

R. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; v=\frac{k}{ab}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}; a=k^2\sqrt{x^2+y^2}$

9. Bara AD, având în punctele B şi C articulate două manşoane, se deplasează în plan vertical. Cele două manşoane se deplasează de-a lungul celor două axe perpendiculare (fig. 7.19). Bara AD formează unghiul a cu axa Ox. Acest unghi variază după legea a = ω t, unde w = const. > 0. Să se determine:

a) traiectoria punctului A şi raza de curbură a acestei traiectorii la momentul t = 0 şi t = p/(2 w) dacă AB = BC = l;

b) hodograful vitezei şi acceleraţiei punctului A.

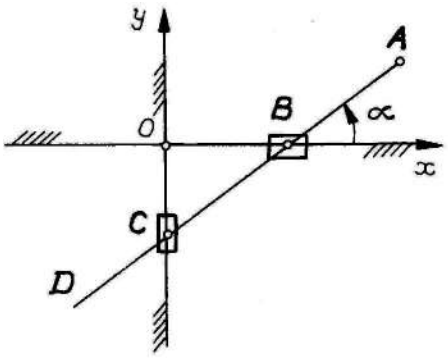


Fig. 7.19

R. a) $\frac{x^2}{4}+y^2=l^2;\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}=4l\right)$

b) $\frac{\dot{x}^2}{4}+\dot{y}^2=l^2\omega^2;\frac{\ddot{x}^2}{4}+\ddot{y}^2=l^2\omega^4$.

10. Mişcarea unui punct în plan, în intervalul de timp $0 \le t \le \frac{\pi}{2\omega}$, este dată de ecuaţia $x = b \sec(\omega t)$ şi $y = b\, tg(\omega t)$, unde b = const. > 0, ω = const. > 0. Determinaţi: a) ecuaţia traiectoriei punctului; b) componentele scalare ale vitezei şi acceleraţiei punctului în coordonate naturale şi polare la momentul t = 0.

R. a) $x^2 - y^2 = b^2$;

b) $v(0) = b\,\omega$; $a_\tau(0) = 0$, $a_\nu(0) = b\,\omega^2$; $v_\rho(0) = 0$; $v_\theta(0) = b\,\omega$; $a_\rho(0) = b\,\omega^2$; $a_\theta(0) = 0$.

11. Pe bara OA ce se roteşte în jurul articulaţiei O, se mişcă (fig. 7.20) culisorul M prin intermediul unui fir inextensibil 2 trecut peste scripetele A. Capătul opus al firului este fixat în B şi se înfăşoară pe discul 1 de rază R, arcul 3 fiind permanent întins. La momentul iniţial (t = 0) bara OA se află în poziţie orizontală, iar culisorul M se suprapune cu punctul C de pe discul 1. Determinaţi: a) ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului M, în coordonate carteziene; b) viteza, acceleraţia tangenţială şi acceleraţia normală ca funcţii ale unghiului φ; c) raza polară la momentul iniţial t = 0, dacă unghiul φ = ωt, unde ω = const.

R. a) $x = R(1 + \omega t)\cos \omega t$; $y = R(1 + \omega t)\sin \omega t$, traiectoria este spirala lui Arhimede ;

$$v(\varphi) = R\omega\sqrt{1 + (1 + \varphi)^2}$$

b) $a_\tau(\varphi) = \dfrac{R\omega^2(1 + \varphi)}{\sqrt{1 + (1 + \varphi)^2}}$ c) $\rho(0) = \dfrac{2\sqrt{2}R}{3}$.

$$a_\nu(\varphi) = \frac{R\omega^2[2 + (1 + \varphi)^2]}{\sqrt{1 + (1 + \varphi)^2}}$$

12. Punctul A situat pe pala elicei unui avion (fig. 7.21) are la un moment dat acceleraţia a şi formează unghiul a cu raza OA = R.

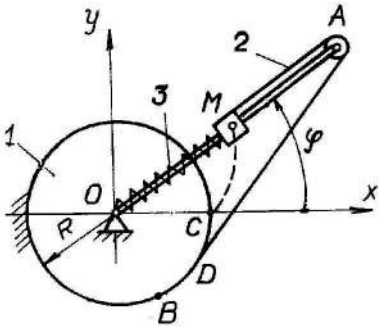


Fig. 7.20

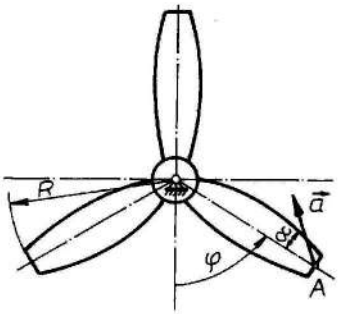


Fig. 7.21

Determinați viteza punctului A și unghiul j la un moment dat, în funcție de accelerația a și timpul t. Se consideră ca la momentul inițial φ = 0 iar elicea se rotește uniform accelerat.

R. $v_A = a\,(\sin\alpha)\,t$;
$\varphi = a\,(\sin\alpha)\,t^2/2\,R$.

13. Un schior (punctul M) sare de la o trambulină montată pe vârful unui deal. În momentul când părăsește trambulina schiorul are viteza $\vec{v}_o$, iar porțiunea de lansare O_1O formează unghiul α cu orizontala iar OA = h. Panta de aterizare AB formează unghiul β cu orizontala. Să se determine înălțimea H maximă atinsă de schior și distanța L la care aterizează (fig. 7.22).

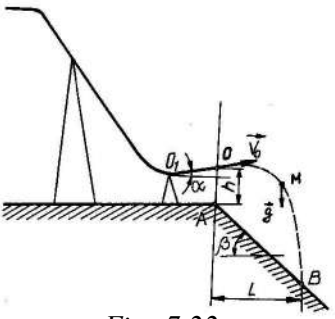


Fig. 7.22

R.

$$H = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g} + h;$$

$$L = \frac{v_o^2 \cos^2\alpha}{g}\left[(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) + \sqrt{(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)^2 + \frac{2gh}{v_o^2 \cos^2\alpha}}\right]$$

14. Dintr-un avion care zboară în linie dreaptă (fig. 7.23), cu viteza constantă $\vec{v}_o$ la înălțimea H, se lansează un pachet (punctul M) care se mişcă pe verticală cu accelerația $\vec{g}$. Să se determine: a) traiectoria punctului M în sistemul de coordonate Oxy; b) distanța l, la care cade pachetul lansat din avion; c) mărimea vitezei punctului în momentul căderii pe sol şi unghiul pe care îl formează această viteză cu verticala A.

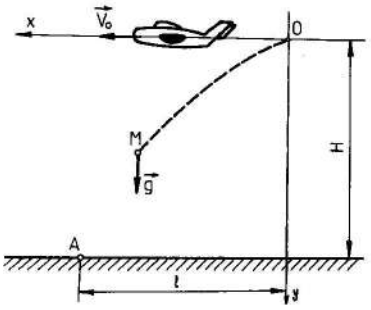


Fig. 7.23

R.

a) $y = \frac{g}{2v_o^2}x^2$; b) $I = v_o\sqrt{\frac{2H}{g}}$; c) $v = \sqrt{v_o^2 + 2gH}$; $\alpha = \text{arctg}\frac{v_o}{\sqrt{2gH}}$

15. Bara AB de lungime l, cade, aflându-se tot timpul mişcării într-un plan vertical. Capetele A şi B se deplasează de-a lungul axelor fixe Ox şi Oy (fig. 7.24).

Să se determine traiectoria punctelor C şi D (dacă AC = l/2, AD = 3l/4) şi de asemenea raza de curbură a traiectoriei punctului D în momentul căderii barei pe axa Ox precum şi viteza şi accelerația punctului D.

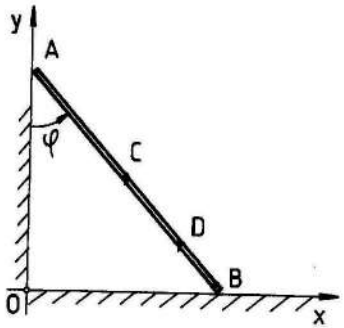


Fig. 7.24

R.

$$x_C^2 + y_C^2 = \frac{l^2}{4};\ x_D^2 + 9y_D^2 = \frac{9}{4}l^2;\ \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{l}{12};$$

pentru determinarea vitezei şi accelerației se utilizează relația:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{y}\dot{x}\right|}$$

8.

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

8.1. Mişcarea generală a rigidului 197
8.1.1. Viteza unghiulară instantanee a rigidului 197
8.1.2. Distribuţia vitezelor 199
8.1.3. Distribuţia acceleraţiilor 200
8.2. Mişcarea de translaţie 202
8.2.1. Definiţie, exemple, grade de libertate 202
8.2.2. Distribuţia vitezelor 203
8.2.3. Distribuţia acceleraţiilor 203
8.3. Mişcarea de rotaţie cu axă fixă 203
8.3.1. Definiţie, exemple, grade de libertate 204
8.3.2. Distribuţia vitezelor 205
8.3.3. Distribuţia acceleraţiilor 206

8.4. Mişcarea elicoidală 207
8.4.1. Definiție, exemple, grade de libertate 207
8.4.2. Distribuția vitezelor 208
8.4.3. Distribuția acceleraţiilor 209
8.4.4. Mişcarea de şurub 210
8.5. Mişcarea plan paralelă 211
8.5.1. Definiție, exemple, grade de libertate 211
8.5.2. Distribuția vitezelor 213
8.5.3. Centrul instantaneu de rotație. Baza şi rostogolitoarea 214
8.5.4. Distribuția acceleraţiilor 217
8.5.5. Polul acceleraţiilor 218
8.6. Mişcarea cu punct fix 220
8.6.1. Definiție, exemple, grade de libertate 220
8.6.2. Distribuția vitezelor 221
8.6.3. Distribuția acceleraţiilor 223
8.7. Probleme rezolvate 224
8.8 Probleme propuse 234

8

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

8.1. MIŞCAREA GENERALĂ A RIGIDULUI

Mişcarea unui rigid în raport cu un sistem de referinţă fix, este cunoscută dacă se poate preciza la orice moment poziţia rigidului, viteza şi acceleraţia oricărui punct al rigidului, faţă de sistemul considerat.

Poziţia în spaţiu a rigidului poate fi stabilită cu ajutorul coordonatelor a trei puncte necoliniare $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi $C(x_3, y_3, z_3)$. Între aceste nouă coordonate pot fi scrise însă trei relaţii care exprimă faptul că distanţele dintre puncte sunt invariabile, corpul fiind solid rigid (nedeformabil). Deci, din cei nouă parametrii geometrici numai şase pot fi consideraţi independenţi, iar rigidul se spune că are şase grade de libertate. Gradele de libertate sunt date de parametrii geometrici independenţi (distanţe sau unghiuri) care precizează poziţia rigidului la un moment dat.

8.1.1. Viteza unghiulară instantanee a rigidului

Studiul cel mai comod al mişcării unui rigid în raport cu un sistem de referinţă fix se face studiind mişcarea unui sistem de referinţă mobil, solidar cu rigidul în mişcare, faţă de sistemul de referinţă fix. Cunoscând poziţia sistemului de referinţă mobil faţă de cel fix, înseamnă că se cunoaşte însăşi poziţia rigidului faţă de sistemul fix.

Cele două sisteme de referinţă utilizate în studiul mişcării rigidului sunt:

Oxyz - sistemul de referinţă mobil, solidar cu rigidul în mişcare şi $O_1x_1y_1z_1$ - sistemul de referinţă fix la care se raportează mişca- rea (fig. 8.1). Poziţia sistemului de referinţă mobil Oxyz faţă de sistemul de referinţă fie $O_1x_1y_1z_1$ poate fi stabilită şi cu ajutorul altor parametri geome- trici

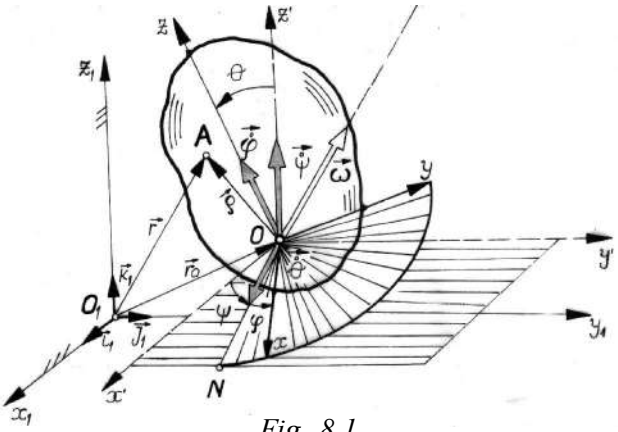


Fig. 8.1

independenți, trei distanțe şi trei unghiuri, UNGHIURILE LUI EULER.

Cele trei distanțe sunt coordonatele punctului $O(x_O, y_O, z_O)$, originea sistemului de referință mobil în sistemul de referință fix, acestea definind translația sistemului Ox'y'z', paralel cu sistemul $O_1x_1y_1z_1$ Cele trei unghiuri ale lui Euler ψ, φ şi θ definesc rotația sistemului mobil, față de sistemul Ox'y'z'. Cu alte cuvinte, pentru a suprapune sistemul de referință mobil peste cel fix, trebuie să efectuăm trei rotații şi trei translații.

Pentru a defini unghiurile lui Euler, reprezentate în figura 8.1, s-a trasat axa ON, numită axa nodurilor, dreapta de intersecție dintre planul orizontal Ox'y' şi planul Oxy rotit în spațiu.

Unghiul ψ, numit **unghi de precesie**, este unghiul format de axele Ox' şi ON; unghiul φ, **unghiul de rotație proprie**, este format de axele ON şi Ox, iar unghiul θ, **unghiul de nutație** este format de axele Oz' şi Oz.

Pentru ca un rigid să poată efectua o mişcare generală este necesar ca el să nu fie supus la nici o restricție geometrică, adică să fie liber în spațiu. Rigidul se află în mişcare generală atunci când cei şase parametri geomertici independenți (8.1) numiți şi parametri de poziție, variază în timp. Deci, cele trei distanțe şi cele trei unghiuri sunt funcții scalare de timp:

$$x_O = x_O(t), y_O = y_O(t), z_O = z_O(t), \psi = \psi(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t). \qquad (8.1)$$

Relațiile (8.1) reprezintă legile mişcării generale a rigidului.

Variația unghiului de precesie ψ indică rotația rigidului în jurul axei

Oz'. Viteza de variație a acestui unghi reprezintă **viteza unghiulară de precesie** $\dot{\psi}$, un vector orientat după axa Oz'. Mărimea acestui vector se exprimă prin derivata unghiului de precesie în raport cu timpul:

$$\dot{\psi} = d\psi / dt.$$

Variația unghiului de rotație proprie φ, indică rotația rigidului în jurul axei Oz. Viteza de variație a acestui unghi reprezintă **viteza unghiulară de rotație proprie** $\dot{\varphi}$, vector orientat după axa Oz, iar mărimea sa se exprimă prin derivata în raport cu timpul a unghiului de rotație proprie:

$$\dot{\varphi} = d\varphi / dt.$$

Variația unghiului de nutație θ, indică rotația rigidului în jurul axei nodurilor ON. Viteza de variație a acestui unghi reprezintă **viteza unghiulară de nutație** $\dot{\theta}$, vector orientat după axa ON. Mărimea vitezei unghiulare de nutație se exprimă prin derivata în raport cu timpul a unghiului de nutație:

$$\dot{\theta} = d\theta / dt.$$

Viteza unghiulară instantanee a rigidului $\vec{\omega}$ este egală cu suma vectorială a vitezelor unghiulare de precesie, de rotație proprie și de nutație:

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}}. \qquad (8.2)$$

Suportul vitezei unghiulare instantanee se numește axă instantanee de rotație a rigidului, notată A.I.R.

8.1.2. Distribuția vitezelor

Poziția unui punct oarecare A al rigidului se precizează cu ajutorul vectorului de poziție $\vec{r}$ față de sistemul fix și a vectorului de poziție $\vec{\rho}$ față de sistemul mobil solidar cu rigidul (8.1). Poziția polului O, originea sistemului mobil, față de sistemul fix, se precizează cu ajutorul vectorului de poziție $\vec{r}_O$. Între aceşti vectori de poziție există relația:

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \qquad (8.3)$$

Viteza unui punct oarecare A se obține derivând în raport cu timpul expresia vectorului de poziție (8.3):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{\rho}}.$$

Ţinând seama că $\dot{\vec{\rho}} = d\vec{\rho}/dt = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, reprezintă derivata în raport cu timpul a vectorului de poziţie $\vec{\rho}$, constant în modul, variabil în direcţie (vezi relaţia 8.14) iar $\vec{v}_O = \dot{\vec{r}}_O$, viteza originii O a reperului mobil, rezultă:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \qquad (8.4)$$

Relaţia (8.4) reprezintă **distribuţia de viteze** în mişcarea generală a rigidului, sau distribuţia lui Euler a vitezelor într-un solid rigid.

Expresia analitică a vitezei punctului oarecare A, în sistemul de referinţă mobil de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se obţine cunoscând expresiile analitice ale vectorilor $\vec{v}_O(v_{Ox}, v_{Oy}, v_{Oz})$, $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ şi $\vec{\rho}(x, y, z)$ în acelaşi sistem de referinţă. În baza relaţiei (8.4) rezultă:

$$\vec{v} = v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Componentele scalare ale vitezei pe axele sistemului solidar cu rigidul sunt:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{Ox} - y\omega_z + z\omega_y, \\ v_y &= v_{Oy} - z\omega_x + x\omega_z, \\ v_z &= v_{Oz} - x\omega_y + y\omega_{x,} \end{aligned} \qquad (8.5)$$

8.1.3. Distribuţia acceleraţiilor

Acceleraţia unui punct oarecare A se obţine derivând în raport cu timpul, distribuţia de viteze (8.4):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}.$$

Ţinând cont că $\vec{a}_O = \dot{\vec{v}}_O$ acceleraţia polului O faţă de sistemul fix, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ acceleraţia unghiulară a rigidului şi $\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, rezultă formula generală a distribuţiei acceleraţiilor în mişcarea generală a rigidului:

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \qquad (8.6)$$

Formula (8.6) este cunoscută şi sub denumirea de relaţia lui Euler privind **distribuţia de acceleraţii** în mişcarea generală a rigidului.

Expresia analitică a acceleraţiei punctului oarecare A, în sistemul de

referință mobil solidar cu rigidul, se obține cunoscând expresiile analitice ale vectorilor $\vec{a}_O(a_{Ox}, a_{Oy}, a_{Oz})$, $\vec{\varepsilon}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ și care înlocuite în (8.6) rezultă:

$$\vec{a} = a_{Ox}\vec{i} + a_{Oy}\vec{j} + a_{Oz}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix}.$$

Componentele scalare ale vectorului accelerație pe axele sistemului mobil sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{Ox} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x\omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x\omega_z + \varepsilon_y)z, \\ a_y &= a_{Oy} - (\omega_z^2 + \omega_x^2)y + (\omega_y\omega_z - \varepsilon_x)z + (\omega_y\omega_x + \varepsilon_z)x, \\ a_z &= a_{Oz} - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z + (\omega_z\omega_x - \varepsilon_y)x + (\omega_z\omega_y + \varepsilon_x)y, \end{aligned} \qquad (8.7)$$

Cele prezentate până aici pot fi sintetizate în schema din figura 8.2.

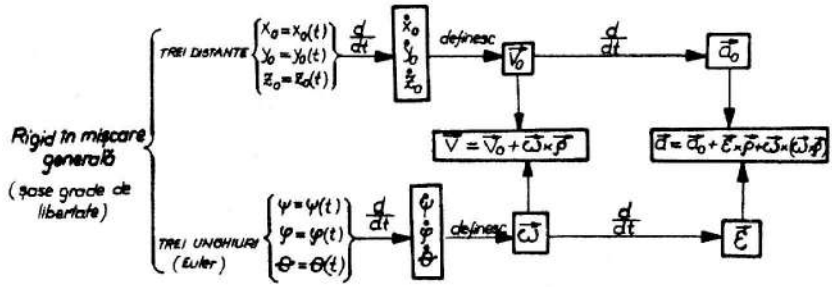


Fig. 8.2

Mișcările particulare ale rigidului se obțin impunând anumite condiții vectorilor $\vec{v}_O$ și $\vec{\omega}$ ce caracterizează distribuția vitezelor în mișcarea generală a rigidului. Aceste mișcări sunt prezentate în tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

Nr.	Mişcarea	$\vec{v}_O$	$\vec{\omega}$	Observaţii
1	Mişcarea de translaţie	$\vec{v}_O \neq 0$	$\vec{\omega} = 0$	Toate punctele au aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie
2	Mişcarea de rotaţie cu axă fixă	$\vec{v}_O = 0$	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ coliniare cu o axă fixă Δ
3	Mişcarea elicoidală	$\vec{v}_O \neq 0$	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{v}_O \parallel \vec{\omega}$ şi coliniară cu o axă Δ
4	Mişcarea plan-paralelă	$\vec{v}_O \neq 0$	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{v}_O \perp \vec{\omega}$ şi $\vec{a}_O \perp \vec{\varepsilon}$, $\vec{v}_O$ şi $\vec{a}_O$ cuprinse într-un plan fix
5	Mişcarea cu punct fix	$\vec{v}_O = 0$	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{\omega}$ are o direcţie oarecare, variabilă în timp. $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ au suporţi diferiţi

8.2. MIŞCAREA DE TRANSLAŢIE

8.2.1. Definiţie, exemple, grade de libertate

Un rigid efectuează o mişcare de translaţie când orice dreaptă a acestuia, rămâne paralelă cu ea însăşi tot timpul mişcării. Caracteristic acestei mişcări este faptul că traiectoriile tuturor punctelor rigidului sunt curbe identice " paralele " între ele, care pot fi suprapuse printr-o translaţie geometrică (v. fig. 8.3)

În mişcarea de translaţie punctele rigidului pot descrie traiectorii rectilinii, circulare sau curbilinii oarecare. Exemple de corpuri care execută mişcări de translaţie sunt: ascensorul, masa unei maşini de rabotat, pistonul în interiorul cilindrului. Aceste corpuri execută mişcări de translaţie cu traiectorii rectilinii. Biela mecanismului paralelogram şi

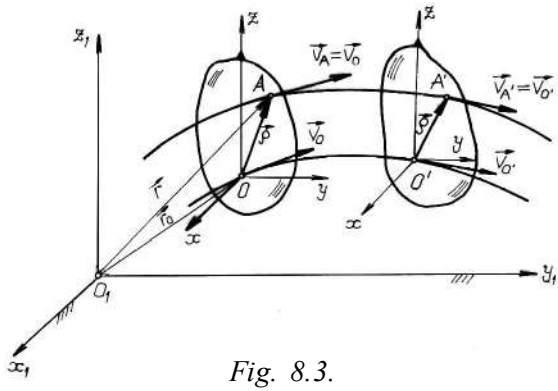


Fig. 8.3.

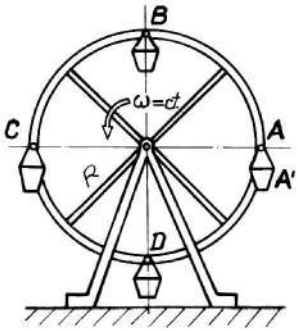


Fig. 8.4

scaunele scrânciobului (v. fig. 8.4) execută mişcări de translaţie cu traiectorie circulară iar biela de cuplare a roţilor de locomotivă şi pedalele bicicletei execută mişcări de translaţie cu traiectorii curbilinii oarecare.

Rigidul prezentat în figura 8.3 execută mişcare de translaţie cu traiectorie curbilinie oarecare. Dacă dreapta OA rămâne paralelă cu ea însăşi tot timpul mişcării, înseamnă că axele sistemului mobil vor fi paralele cu axele sistemului fix, tot timpul mişcării. Deci, o altă caracteristică a mişcării de translaţie este că viteza unghiulară de rotaţie a sistemului mobil faţă de cel fix este nulă:

$$\vec{\omega} = 0 \text{ şi } \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0. \tag{8.8}$$

Relaţiile (8.8) exprimă particularităţile cinematice ale mişcării de translaţie.

Poziţia rigidului se poate preciza la orice moment cu ajutorul vectorului de poziţie $\vec{r}_O = \vec{r}_O(t,)$ caracterizat de funcţiile scalare de timp:

$$x_O = x_O(t), y_O = y_O(t), z_O = z_O(t). \tag{8.9}$$

Rezultă că rigidul în mişcare de translaţie are trei grade de libertate.

8.2.2. Distribuţia vitezelor

Distribuţia de viteze se obţine plecând de la formula generală (8.4) şi ţinând seama de particularităţile cinematice (8.8) ale mişcării de translaţie:

$$\vec{v} = \vec{v}_O, \tag{8.10}$$

adică, în mişcarea de translaţie, toate punctele rigidului, au la un moment dat aceeaşi viteză ca vector. Prin urmare, viteza este un vector liber.

8.2.3. Distribuţia acceleraţiilor

Pornind de la formula generală (8.4) şi ţinând seama de relaţiile (8.8) se obţine formula distribuţiei de acceleraţii în mişcarea de translaţie:

$$\vec{a} = \vec{a}_O, \qquad (8.11)$$

adică, la un moment dat toate punctele rigidului au aceeaşi acceleraţie ca vector. Şi acceleraţia este un vector liber.

Când un corp are o mişcare de translaţie se face abstracţie de dimensiunile lui şi se urmăreşte mişcarea unui punct al său, de exemplu, centrul său de masă.

8.3. MIŞCAREA DE ROTAŢIE CU AXĂ FIXĂ

8.3.1. Definiţie, exemple, grade de libertate

Un rigid efectuează o mişcare de rotaţie cu axă fixă atunci când două puncte ale sale rămân fixe tot timpul mişcării. Dreapta care uneşte cele două puncte este de asemenea fixă, ea numindu-se axă de rotaţie.

Exemple de rigide în mişcare de rotaţie: rotorul unui electromotor, rotorul unei turbine, volantul, roţile dinţate cu axe fixe de rotaţie etc.

În figura 8.5. se consideră un rigid de formă oarecare în mişcare de rotaţie în jurul axei OO‘. Pentru simplificarea studiului mişcării de rotaţie se aleg originile O_1 şi O ale celor două sisteme de referinţă în acelaşi punct $(O \equiv O_1)$, iar axele O_z şi O_{z_1} să coincidă cu axa de rotaţie. Se observă că poziţia rigidului la un moment dat poate fi complet precizată cu ajutorul unghiului $\theta = \theta(t)$. Prin urmare, rigidul în mişcare de rotaţie cu axă fixă are un singur grad de libertate.

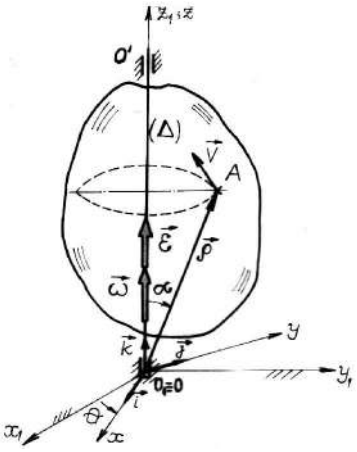


Fig. 8.5

Ţinând seama de definiţia mişcării, rezultă că fiecare punct al rigidului descrie o traiectorie circulară, cuprinsă într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie. Caracteristic acestei mişcări este faptul că vectorii viteză unghiulară şi acceleraţie unghiulară sunt coliniari, şi au direcţie fixă, direcţia axei de rotaţie. De

asemenea viteza şi acceleraţia originii O a sistemului de referinţă mobil solidar cu rigidul, au valori nule. Poziţia unui punct A oarecare al rigidului poate fi precizată cu ajutorul vectorului de poziţie $\vec{\rho}$.

8.3.2. Distribuţia vitezelor

Particularităţile acestei mişcări sunt:

$$\vec{v}_O = 0;\ \vec{a}_O = 0;\ \vec{\omega} = \omega\vec{k};\ \vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k}. \tag{8.12}$$

Distribuţia vitezelor în mişcarea de rotaţie cu axă fixă rezultă din relaţia generală (8.4) a lui Euler. prin particularizare, ţinând seama de caracteristicile acestei mişcări (8.12) sau prin derivarea în raport cu timpul a vectorului de poziţie $\vec{\rho}$, vector variabil în direcţie constant în mărime. Se obţine astfel:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{8.13}$$

Din relaţia (8.13) rezultă că vectorul viteză $\vec{v}$ este perpendicular pe planul definit de cei doi vectori din produsul vectorial, sensul stabilit de regula şurubului drept, iar mărimea dată de relaţia:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{\rho}| \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R. \tag{8.14}$$

Proiecţiile vitezei pe axele sistemului de referinţă mobil, rezultă din (8.13):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j},$$

$$v_x = -y\omega;\ v_y = x\omega;\ v_z = 0.$$

Proprietăţile distribuţiei de viteze sunt următoarele:

a) punctele aparţinând axei de rotaţie au viteză nulă;

b) vitezele sunt conţinute în plane perpendiculare pe axa de rotaţie, deoarece $v_z = 0$;

c) vitezele punctelor situate pe o dreaptă (Δ_1) paralelă cu axa de rotaţie (Δ), au aceiaşi mărime, direcţie şi sens (sunt egale);

d) vitezele punctelor situate pe o dreaptă (Δ_2) perpendiculară pe axa de rotaţie, sunt paralele între ele şi perpendiculare pe această dreaptă

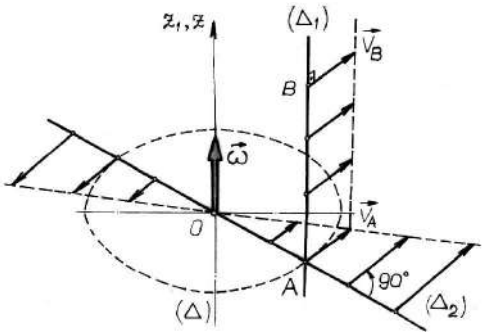


Fig. 8.6.

(Δ_2) iar modulele lor sunt direct proporţionale cu distanţa de la punct la axa de rotaţie (v. fig. 8.6).

8.3.3. Distribuţia acceleraţiilor

Distribuţia acceleraţiilor se obţine derivând în raport cu timpul distribuţia de viteze (8.13) sau din a doua relaţie a lui Euler (8.6), ţinând seamă de particularităţile cinematice (8.12) ale mişcării:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \tag{8.15}$$

Deoarece vectorii viteză unghiulară $\vec{\omega}$ şi acceleraţie unghiulară $\vec{\varepsilon}$, sunt dirijaţi după axa de rotaţie, rezultă că termenul $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$, reprezintă componenta tangenţială a acceleraţiei, iar termenul $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$, componenta normală.

Proiecţiile acceleraţiei unui punct al rigidului în mişcare de rotaţie cu axă fixă, rezultă din relaţia (8.15) prin dezvoltarea determinanţilor:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = \left(-y\varepsilon - x\omega^2\right)\vec{i} + \left(x\varepsilon - y\omega^2\right)\vec{j}.$$

Deci: $a_x = \left(-y\varepsilon - x\omega^2\right), a_y = \left(x\varepsilon - y\omega^2\right), a_z = 0.$ (8.16)

Modulul acceleraţiei: $\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, (8.17)

unde $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, este distanţa de la punct la axa de rotaţie.

Proprietăţile distribuţiei de acceleraţii:

a) punctele situate pe axa de rotaţie au acceleraţie nulă;

b) acceleraţiile sunt vectori conţinuţi în plane perpendiculare pe axa de rotaţie;

c) acceleraţiile punctelor situate pe o dreaptă (Δ_1) paralelă cu axa de

rotație (Δ) sunt egale (v. fig. 8.7);

d) accelerațiile punctelor situate pe o dreaptă (Δ_2) perpendiculară pe axa de rotație (Δ) variază liniar şi sunt înclinate în sensul accelerației unghiulare cu același unghi $(\varphi = \text{arctg}(\varepsilon/\omega^2))$.

8.4. MIŞCAREA ELICOIDALĂ

8.4.1. Definiție, exemple, grade de libertate

Un rigid efectuează o mişcare elicoidală atunci când două puncte ale sale se deplasează în timpul mişcării pe o dreaptă fixă din spațiu, numită axa mişcării elicoidale. Mişcarea elicoidală se mai numeşte şi mişcare de roto-translație.

În conformitate cu această definiție se deduce că mişcarea rigidului rezultată din compunerea unei mişcări de translație rectilinie cu o rotație în jurul aceleiaşi axe.

Exemple de rigide în mişcare elicoidală: mişcarea burghiului în timpul prelucrării, mişcarea unui şurub într-o piuliță fixă, elicea unui avion care se deplasează în linie dreaptă, glontele ce se deplasează în țeava armei etc.

În figura 8.8. s-a reprezentat un rigid în mişcare elicoidală. Cele două puncte O şi O‘ rămân pe dreapta fixă (Δ) Rigidul, pe lângă mişcarea de rotație în jurul axei (Δ), are şi o mişcare de translație de-a lungul ei.

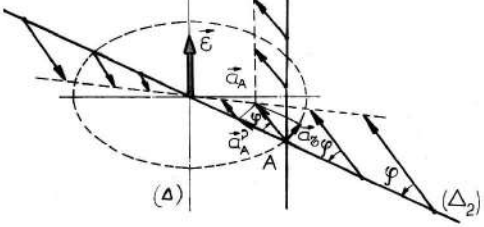


Fig. 8.7

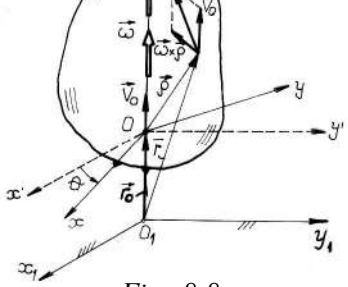


Fig. 8.8.

Cele două sisteme de referinţă, cel fix $O_1x_1y_1z_1$ şi cel mobil Oxyz, solidar cu rigidul se aleg cu axele O_1z_1 şi Oz suprapuse cu axa mişcării elicoidale (Δ). Poziţia sistemului de referinţă mobil, faţă de sistemul fix, se determină la orice moment prin intermediul a doi parametri geometrici independenţi, care sunt funcţii de timp:

$$z_O = z_O(t); \theta = \theta(t). \tag{8.18}$$

Relaţiile (8.18) reprezintă legile mişcării elicoidale.

Rigidul în mişcare elicoidală are, deci, două grade de libertate. Dacă între cei doi parametrii există o relaţie liniară de forma $z_O = h\theta$, unde h este o constantă, mişcarea elicoidală este cu pas constant, iar rigidul are un singur grad de libertate. De exemplu şurubul în interiorul unei piuliţe fixe execută o mişcare elicoidală cu pas constant. Mişcarea elicoidală cu pas constant se mai numeşte şi mişcare de şurub, iar traiectoria unui punct aparţinând rigidului este o elice cilindrică.

Dacă între cei doi parametrii z_O şi θ există o relaţie neliniară, mişcarea este elicoidală cu pas variabil. De exemplu, cazul mişcării glonţului în ţeava armei.

8.4.2. Distribuţia vitezelor

Particularităţile mişcării elicoidale sunt:

$$\vec{v}_O = v_O\vec{k}, \vec{a}_O = a_O\vec{k}; \vec{\omega} = \omega\vec{k}; \vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k}. \tag{8.19}$$

Deci în cazul mişcării elicoidale vectorii $\vec{v}_O$ şi $\vec{\omega}$ sunt coliniari $(\vec{v}_O \| \vec{\omega})$. În tot timpul mişcării, un punct A al rigidului rămâne la o distanţă fixă R faţă de axa mişcării elicoidale.

Distribuţia vitezelor în mişcarea elicoidală rezultă din prima relaţie a lui Euler (8.4), ţinând seama de particularităţile acestei mişcări (8.19). Deci: $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, (8.20)

unde $\vec{v}_O = \dot{z}_O\vec{k} = \vec{v}_{tr}$, reprezintă componenta de translaţie a vitezei iar $\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{rot}$, reprezintă componenta de rotaţie a vitezei. Prin urmare, distribuţia de viteze se obţine prin suprapunerea a două câmpuri de viteze: unul specific mişcării de translaţie de-a lungul axei Oz_1 şi al doilea specific unei mişcări de rotaţie în jurul aceleiaşi axe.

Proiecțiile vitezei unui punct în sistemul de referință mobil solidar cu rigidul rezultă din dezvoltarea expresiei (8.20):

$$\vec{v} = \dot{z}_O\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} + \dot{z}_O\vec{k}, \tag{8.21}$$

deci $v_x = -y\omega, v_y = x\omega, v_z = \dot{z}_O = v_O$.

Modulul $|\vec{v}| = \sqrt{\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + v_O^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_O^2}$. (8.22)

Din cele reprezentate mai sus se desprind următoarele proprietăți:

a) rigidul în mişcare elicoidală nu are puncte de viteză nulă, punctele situate pe axa mişcării elicoidale au viteză minimă egală cu v_O;

b) punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa mişcării elicoidale au vitezele egale;

c) distribuția de viteze rezultă prin suprapunerea unui câmp de viteze specific translației de-a lungul axei fixe (Δ) şi a unui câmp specific rotației în jurul aceleiaşi axe.

8.4.3. Distribuția acceleraților

Distribuția de acceleraţii rezultă prin derivarea distribuției de viteze (8.20) în raport cu timpul, sau din a doua relație a lui Euler (8.6) ținând seama de particularitățiile acestei mişcări (8.19). Prin urmare:

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right), \tag{8.23}$$

unde $\vec{a}_O = a_O\vec{k} = \vec{a}_{tr}$, reprezintă componenta de translație a acceleraţiei; $\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} = \vec{a}_{rot}^{\tau}$, reprezintă componenta tangențială de rotație; $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \vec{a}_{rot}^{\nu}$, reprezintă componenta normală de rotație.

Proiecțiile acceleraţiei unui punct pe axele sistemului mobil de referință, solidar cu rigidul rezultă prin dezvoltarea expresiei (8.23) ținând seamă de particularitățile mişcării elicoidale (8.19):

$$\vec{a} = a_O\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix}, \tag{8.24}$$

deci: $a_x = -y\varepsilon + x\omega^2; a_y = x\varepsilon - y\omega^2; a_z = a_O$.

Modulul acceleraţiei:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x^2 + y^2)\cdot(\varepsilon^2 + \omega^4) + a_O^2} = \sqrt{R^2(\varepsilon^2 + \omega^4) + a_O^2}. \qquad (8.25)$$

Ca *proprietăţi* ale distribuţiei de acceleraţii se desprind următoarele:

a) rigidul în mişcare elicoidală nu are puncte de acceleraţie nulă; punctele situate pe axa mişcării elicoidale au acceleraţie minimă egală cu a_O;

b) punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa mişcării elicoidale, au aceiaşi acceleraţie;

c) distribuţia de acceleraţii rezultă prin suprapunerea unui câmp de acceleraţii corespunzător mişcării de translaţie de-a lungul axei fixe (Δ) şi a unui câmp specific mişcării de rotaţie în jurul aceleiaşi axe.

8.4.4. Mişcarea de şurub

Mişcarea de şurub este un caz particular al mişcării elicoidale. Particularitatea constă în aceea că datorită existenţei filetului la o rotaţie completă a şurubului, acesta înaintează în lungul axei sale cu un pas p. Prin urmare, între funcţiile $z_O(t)$ şi $\theta(t)$ există o relaţie liniară de forma $z_O = h\theta$, iar rigidul are un singur grad de libertate.

Dacă constanta $h > 0$, şurubul este drept, iar dacă $h < 0$, şurubul este stâng.

Pentru a determina valoarea acestei constante se desfăşoară filetul şurubului care este o elice cilindrică cu pas constant. Prin desfăşurarea filetului corespunzător unui pas, se obţine un triunghi dreptunghic (fig. 8.9.) de unghi α, unghiul filetului.

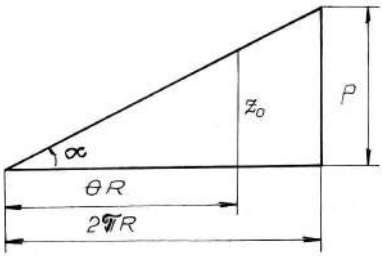


Fig. 8.9

Din triunghiurile dreptunghice respective rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z_O}{R\theta} = \frac{p}{2\pi R} \text{ sau}$$

$$z_O = R(tg\alpha)\cdot\theta = \frac{p}{2\pi}\cdot\theta. \tag{8.26}$$

Din relația (8.26) rezultă constanta h, a şurubului:

$$h = Rtg\alpha = \frac{p}{2\pi}. \tag{8.27}$$

În aplicațiile practice interesează de obicei, expresiile vitezei şi acceleraţiei de înaintare a şurubului, cunoscând viteza unghiulară ω a şurubului. Aceasta se obține prin derivarea în raport cu timpul a relației (8.34):

- viteza de avans: $v_O = \dot{z}_O = Rtg\alpha\cdot\omega = \frac{p}{2\pi}\cdot\omega;$ (8.28)

- acceleraţia de avans: $a_O = \ddot{z}_O = Rtg\alpha\cdot\varepsilon = \frac{p}{2\pi}\cdot\varepsilon;$ (8.29)

unde p este pasul filetului; R este raza medie a şurubului; α este unghiul de înclinare al filetului.

În cazul şuruburilor cu mai multe începuturi, avansul axial la o rotație de unghi θ este:

$$z_O = \frac{p}{2\pi}\cdot n_f\cdot\theta. \tag{8.30}$$

unde n_f este numărul de începuturi al filetului.

8.5. MIŞCAREA PLAN PARALELĂ

8.5.1. Definiție, exemple, grade de libertate

Un rigid efectuează o mişcare planparalelă, atunci când un plan al său rămâne tot timpul mişcării într-un plan fix numit plan director.

În figura 8.10 se consideră un rigid de formă oarecare în mişcare plan paralelă. Planul (π) haşurat, determinat de trei puncte necoliniare ale rigidului, rămâne tot timpul mişcării conținut în planul (π_1), numit plan director.

Pentru studiul mişcării plan-paralele se aleg două sisteme de referință: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ ataşat planului fix (π_1) şi un sistem mobil Oxyz, solidar cu rigidul în mişcare plan paralelă, ataşat planului mobil (π). Poziția la un

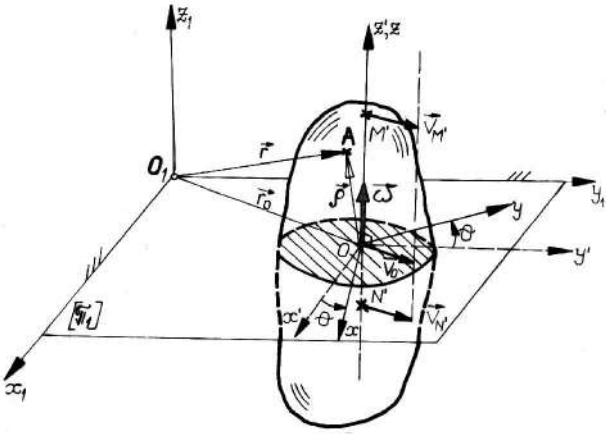


Fig. 8.10.

moment dat a sistemului mobil (deci şi a rigidului) este definită de coordona- tele x_O, y_O ale originii O faţă de sistemul fix şi de unghiul θ dintre axele O_x şi O_1x_1.

Aceşti parametri geometrici independenţi sunt funcţii scalare de timp:

$$x_O = x_O(t); y_O = y_O(t); \theta = \theta(t). \qquad (8.31)$$

Aceaste funcţii (8.31) reprezintă legile mişcării plan-paralele a rigidului.Se trage concluzia că un rigid aflat în mişcare plan-paralelă, are trei grade de libertate.

În tehnică se întâlnesc deseori corpuri în mişcare plan paralelă, ca de exemplu: biela mecanismelor plane, roţile vehiculelor rulând în linie dreaptă, scripetele cu axă mobilă de rotaţie, bilele unui rulment radial, etc.

Din cele prezentate până aici, rezultă următoarele:

a) orice dreaptă a rigidului perpendiculară pe planul director, rămâne tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi, adică are o mişcare de translaţie;

b) în timpul mişcării, punctele rigidului descriu traiectorii "paralele" (curbe plane) situate în plane paralele cu planul director;

c) dacă rigidul este o placă de grosime neglijabilă, conţinută în planul fix, mişcarea se numeşte plană;

d) distribuţia de viteze şi acceleraţii este aceiaşi în plane paralele cu planul director; din acest considerent mişcarea rigidului se numeşte plan-paralelă;

e) viteza unghiulară instantanee este perpendiculară pe vitezele punctelor rigidului $(\vec{\omega} \perp \vec{v}_O)$.

Ţinând seama de cele prezentate, studiul mişcării punctelor unui rigid

în mişcare plan-paralelă, poate fi redus la studiul mişcării într-un singur plan, de exemplu în planul Oxy.

8.5.2. Distribuția vitezelor

Distribuția vitezelor în mişcare plan-paralelă rezultă prin derivarea, în raport cu timpul, a vectorului de poziție $\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}$ sau din relațiile generale ale lui Euler (8.4) ținând seama de particularitățile acestei mişcări $\left(\vec{\omega} \perp \vec{v}_O \text{ şi } \vec{\omega} \| \vec{\varepsilon}\right)$. Astfel rezultă:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \text{ cu } \vec{\omega} \perp \vec{v}_O, \tag{8.32}$$

unde $\vec{v}_O = \vec{v}_{tr}$, reprezintă componenta de translație iar $\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{rot}$, reprezintă componenta de rotație a vitezei.

Rezultă că, distribuția de viteze, specifică acestei mişcări poate fi considerată ca fiind obținută prin compunerea unui câmp de viteze specific translației, cu un câmp de viteze specific mişcării de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul în care s-a efectuat translația.

Proiecțiile vitezei unui punct, pe axele sistemului de referință mobil, rezultă prin dezvoltarea expresiei (8.32), astfel:

$$\vec{v} = v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(v_{Ox} - \omega y\right)\vec{i} + \left(v_{Oy} + \omega x\right)\vec{j},$$

unde: $v_x = v_{Ox} - y\omega; v_y = v_{Oy} + x\omega; v_z = 0.$ (8.33)

Deci, viteza oricărui punct al rigidului este conținută într-un plan paralel cu planul director.

Pentru un rigid în mişcare plan-paralelă, cunoscând viteza unui punct $\vec{v}_O$ şi viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}$, se poate determina prin compunerea câmpului de viteze, viteza oricărui punct aparținând rigidului. Astfel, viteza punctului M, în baza relației (8.32), este:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{MO} \times \vec{\omega} = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}, \tag{8.34}$$

unde $\vec{v}_O$, este componenta de translație iar $\vec{v}_{MO}$, este componenta de rotație, viteza lui M față de O, perpendiculară pe OM în sensul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$.

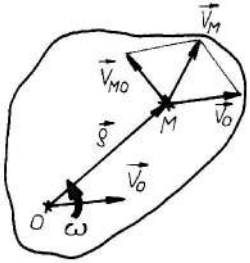


Fig. 8.11.

În figura 8.11. s-a determinat viteza punctului M din planul director, prin compunerea vectorilor viteză de translație și rotație conform relației (8.34).

8.5.3. Centrul instantaneu de rotație. Baza și rostogolitoarea

Ca și celelalte mișcări ale rigidului, studiate până aici, și în mișcarea plan-paralelă se pune întrebarea dacă există puncte de viteză instantanee nulă. Pentru determinarea pe cale analitică a coordonatelor punctelor de viteză nulă, se pune condiția ca proiecțiile vitezei unui punct oarecare, aparținând rigidului în mișcare plan-paralelă, să fie nule:

$$v_x = v_{Ox} - y\omega = 0; v_y = v_{Oy} + x\omega = 0;$$

de unde rezultă: $x_I = -\frac{v_{Oy}}{\omega}; y_I = \frac{v_{Ox}}{\omega}.$ (8.35)

Relațiile (8.35) reprezintă coordonatele unui punct, notat cu **I** situat în planul director, numit centrul instantaneu de rotație (C.I.R.).

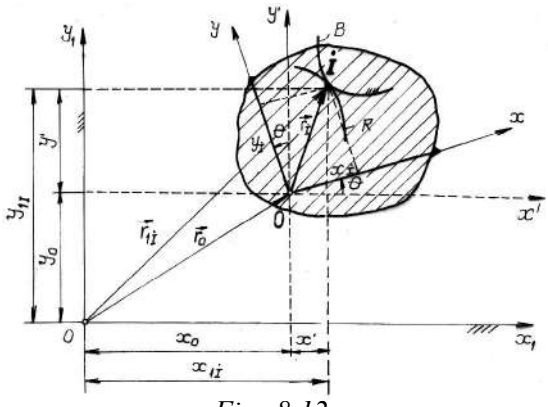


Fig. 8.12.

În figura 8.12. s-a reprezentat secțiunea haşurată din planul director al rigidului, în mișcare plan-paralelă, și poziția centrului instantaneu de rotație în ambele sisteme de referință: $\mathbf{I}(x_I, y_I)$ în sistemul mobil Oxy și $\mathbf{I}(x_{II}, y_{II})$ în sistemul de referință $O_1x_1y_1$.

Deci, centrul instantaneu de rotație (**I**) este punctul de viteză instantanee nulă, situat în planul director. De fapt, există o infinitate de puncte de viteză instantanee nulă, situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul director, numită axă

instan- tanee de rotație (A.I.R.). Centrul instantaneu de rotație reprezintă deci, punctul în care axa instantanee de rotație înțeapă planul director. Conform relației (8.35) pozițiile centrului instantaneu de rotație şi axei instantanee de rotație nu sunt fixe în timpul mişcării, ci se modifică deoarece mărimile cinematice ω, v_{Ox} şi v_{Oy} sunt funcție de timp.

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație în raport cu sistemul de referință mobil este o curbă numită centroidă mobilă sau **rostogolitoare.** Ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei sunt relațiile (8.35), exprimate în parametri cinematici.

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație în sistemul de referință fix $O_1x_1y_1$, este o altă curbă, numită centroidă fixă sau **bază.**

Baza şi rostogolitoarea sunt două curbe tangente în centrul instantaneu de rotație (I), iar în timpul mişcării baza rămnând fixă, iar rostogolitoarea se rostogoleşte fără alunecare pe bază.

Coordonatele centrului instantaneu de rotație în sistemul de referință fix (v. fig. 8.12), respectiv ecuațiile parametrice ale bazei, se obțin utilizând formulele de la translația şi rotația sistemelor de axe. Sistemul Oxy este translatat şi rotit cu unghiul θ față de sistemul fix $O_1x_1y_1$, Rezultă că:

$$x_{1I} = x_O + x';y_{1I} = y_O + y'. \tag{8.36}$$

Sub formă matriceală coordonatele x_{1I} şi y_{1I} rezultă direct, utilizând matricea de rotație:

$$\begin{bmatrix} x_{1I} \\ y_{1I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \end{bmatrix}. \tag{8.37}$$

Ecuațiile parametrice ale bazei sunt:

$$x_{1I} = x_O + x_I\cos\theta - y_I\sin\theta;y_{1I} = y_O + x_I\sin\theta + y_I\cos\theta. \tag{8.38}$$

Ținând seama de relațiile (8.35) rezultă:

$$x_{1I} = x_O - \frac{v_{Oy}}{\omega}\cos\theta - \frac{v_{Ox}}{\omega}\sin\theta;y_{1I} = y_O - \frac{v_{Oy}}{\omega}\sin\theta - \frac{v_{Ox}}{\omega}\cos\theta.$$

Locul geometric al axei instantanee de rotație în sistemul de referință fix, este o suprafață cilindrică fixă, numită **axoidă fixă**, iar locul geometric al axei instantanee de rotație în sistemul de referință mobil, este o suprafață cilindrică mobilă, numită **axoidă mobilă**. În timpul mişcării plan-paralele a rigidului axoida mobilă se rostogoleşte fără alunecare pe axoida fixă,

generatoarea lor comună fiind axa instantanee de rotație, la momentul respectiv. Cele două suprafețe cilindrice pot fi tangente interior sau tangente exterior. În figura 8.13. se prezintă cazul celor două axoide tangente exterior.

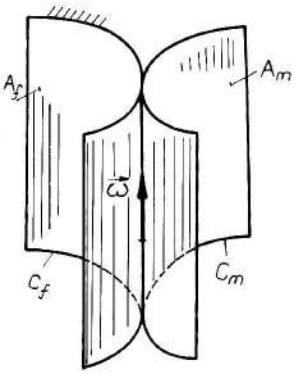


Fig. 8.13.

Dacă **I** este punctul de viteză instantanee nulă; se pune întrebarea care este distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă față de acest punct. Considerându-se **I**, punctul de referință, viteza unui alt punct oarecare B al rigidului este:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times IB = \vec{\omega} \times IB = \vec{v}_{BI}, \text{ deoarece } \vec{v}_I = 0. \qquad (8.39)$$

Relația (8.39) demonstrează vectorial că distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă, față de centrul instantaneu de rotație, este identică cu cea dintr-o mișcare de rotație, ca și când figura plană din planul director s-ar roti în jurul lui **I** cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$. Aceasta este cea mai importantă proprietate a distribuției vitezelor într-un rigid în mișcare plan-paralelă. Cunoscând poziția centrului instantaneu de rotație și viteza unghiulară $\vec{\omega}$ se poate determina viteza oricărui punct aparținând rigidului în mișcare plan-paralelă. Conform relației (8.47) viteza punctelor B și D sunt vectori perpendiculari pe razele instantanee IB și ID în sensul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ (fig. 8.14.):

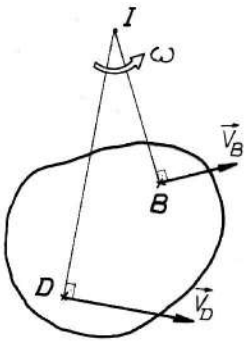


Fig. 8.14

$$v_B = \omega \cdot IB \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot IB \text{ și } v_D = \omega \cdot ID \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot ID,$$

În cazul aplicațiilor practice, locurile geometrice ale centrului instantaneu de rotație, se pot determina analitic, aplicând teoria generală a locurilor geometrice: se determină poziția centrului instantaneu de rotație; se aleg cele două sisteme de referință fix și mobil; se exprimă coordonatele centrului instantaneu de rotație în cele două sisteme de referință în funcție de parametrul geometric variabil, unghiul θ; se elimină apoi acest parametru variabil între ecuațiile parametrice și se determină ecuațiile celor două locuri geometrice propriu-zise, baza și rostogolitoarea mișcării plan-paralele.

8.5.4. Distribuția accelerațiilor

Distribuția accelerațiilor în mișcarea plan-paralelă rezultă derivând în raport cu timpul distribuția vitezelor (8.32), sau din a doua relație a lui Euler (8.4) ținând seama de particularitățile acestei mișcări. Astfel rezultă:

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}), \text{ cu } \vec{\varepsilon} \| \vec{\omega} \text{ și } \vec{\varepsilon} \perp \vec{a}_o. \qquad (8.40)$$

Proiecțiile accelerației unui punct oarecare, pe axele sistemului de referință rezultă prin dezvoltarea produselor vectoriale din expresia (8.40):

$$= (a_{Ox} - y\varepsilon - x\omega^2)\vec{i} + (a_{Oy} + x\varepsilon - y\omega^2)\vec{j}.$$

unde: $a_x = a_{Ox} - y\varepsilon - x\omega^2; a_y = a_{Oy} + x\varepsilon - y\omega^2; a_z = 0.$ (8.41)

Rezultă că, accelerațiile punctelor sunt obținute în plane paralele cu planul fix, director $O_1x_1y_1$.

Pentru un punct M situat în planul director, distribuția de accelerații poate fi scrisă astfel:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times OM + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times OM) =$$
$$= \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times OM + (\vec{\omega} \cdot OM) \cdot \vec{\omega} - \omega^2 \cdot OM,$$

deoarece $\vec{\omega} \cdot OM = 0$, rezultă: $\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times OM - \omega^2 \cdot OM,$

unde $\vec{a}_O$ reprezintă componenta de translație; $\vec{\varepsilon} \times OM = \vec{a}^{\tau}_{MO}$ reprezintă accelerația tangențială a componentei de rotație a lui M față de O; $-\omega^2 \cdot OM = \vec{a}^{\nu}_{MO}$ reprezintă accelerația normală a componentei de rotație a lui M față de O.

Deci, distribuția de accelerații se va scrie astfel:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}^{\tau}_{MO} + \vec{a}^{\nu}_{MO} = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}. \qquad (8.42)$$

Cunoscând accelerația unui punct de referință $\vec{a}_O$, viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}$ și accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$, la un moment dat, se poate determina accelerația punctului M prin compunerea vectorială din relația (8.42). În figura 8.15. se prezintă un exemplu de compunere a vectorilor.

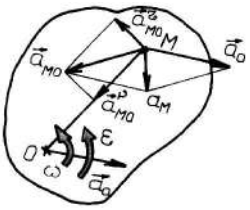


Fig. 8.15.

8.5.5. Polul acceleraţiilor

Şi în cazul acceleraţiilor se pune problema determinării punctului, din planul director, de acceleraţie instantanee nulă. Acest punct, notat cu **J**, se numeşte centrul sau polul acceleraţiilor. Coordonatele ploului acceleraţiilor rezultă punând condiţia ca proiecţiile acceleraţiei unui punct oarecare (8.41), determinate în paragraful precedent, să fie nule:

$$a_x = a_{Ox} - y\varepsilon - x\omega^2 = 0; a_y = a_{Oy} + x\varepsilon - y\omega^2 = 0. \qquad (8.43)$$

Rezolvând sistemul celor două ecuaţii (8.43), prin metoda reducerii rezultă cele două necunoscute, coordonatele polului **J**:

$$x_J = \frac{a_{Ox}\omega^2 - a_{Oy}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}; y_J = \frac{a_{Oy}\omega^2 - a_{Ox}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (8.44)$$

Din formulele (8.44) se vede că polul acceleraţiilor este un punct care îşi schimbă poziţia în timp, deoarece a_{Ox} şi a_{Oy} sunt în general funcţii de timp. Întrucât cota z_J a polului **J** poate fi luată arbitrar, se deduce că în mişcarea plan-paralelă există o axă perpendiculară pe planul director ce trece prin **J** şi ale cărei puncte au acceleraţie instantanee nulă.

În general, polul acceleraţiilor şi centrul instantaneu de rotaţie sunt două puncte diferite.

Ca şi la viteze, este interesant de studiat distribuţia de acceleraţii faţă de punctul de acceleraţie instantanee nulă.În acest caz, cunoscând distribuţia de acceleraţii în mişcarea plan-paralelă (8.40) se consideră **J** ca punct de referinţă $(J \equiv O)$, rezultând:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_J + \vec{\varepsilon} \times JB + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times JB) = \vec{\varepsilon} \times JB + (\vec{\omega} \cdot JB)\vec{\omega} - \omega^2 \cdot JB,$$

deoarece: $\vec{a}_J = 0$ şi $\vec{\omega} \cdot JB = 0$, se obţine:

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times JB - \omega^2 \cdot JB = \vec{a}_{BJ}^{\tau} + \vec{a}_{BJ}^{\nu} = \vec{a}_{BJ}, \qquad (8.45)$$

unde $\vec{a}_{BJ}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times JB$ reprezintă componenta tangenţială a acceleraţiei punctului B faţă de polul **J** iar $\vec{a}_{BJ}^{\nu} = -\omega^2 \cdot JB$ reprezintă componenta normală a acceleraţiei punctului B faţă de **J**. Între cele două componente există unghiul de 90°. Mărimea acceleraţiei punctului B este:

$$a_B = \sqrt{\left(a_{BJ}^{\tau}\right)^2 + \left(a_{BJ}^{\nu}\right)^2} = JB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{8.46}$$

Unghiul dintre direcția accelerației totale $\vec{a}_B$ şi componenta normală este:

$$tg\varphi = \frac{a_{BJ}^{\tau}}{a_{BJ}^{\nu}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{8.47}$$

Cu ajutorul relației (8.45) se demonstrează pe cale vectorială că la un moment dat distribuția de accelerații în mişcare plan-paralelă este identică cu cea din mişcarea de rotație, ca şi cum figura plană din planul director s-ar roti în jurul polului **J** cu viteza unghiulară ω şi accelerația unghiulară ε.

În figura 8.16. se prezintă distribuția de accelerații față de polul **J**.

Relațiile (8.46) scrise sub forma (8.48) ne permit să aflăm poziția polului accelerațiilor, cunoscând accelerația $\vec{a}_D$ a unui punct în mărime, direcție şi sens şi parametrii cinematici ω şi ε:

$$DJ = \frac{\left|\vec{a}_D\right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \varphi = \text{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{8.48}$$

Determinarea polului **J** (v. fig. 8.17,a) pe baza relațiilor (8.48) se face astfel: se roteşte suportul accelerației punctului D, în sensul accelerației unghiulare ε, cu unghiul φ şi se află direcția pe care se găseşte polul **J**. Pe această direcție, la distanța DJ, calculată cu prima relație (8.48) se află polul **J**.

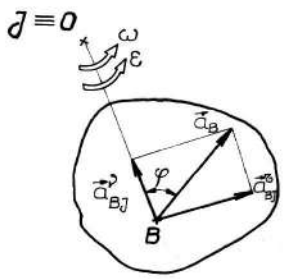
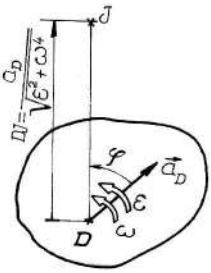
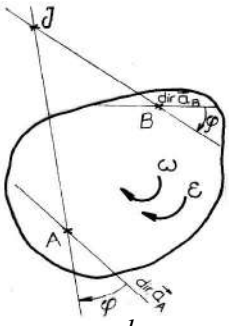


Fig. 8.16.



a.



b.

Fig. 8.17

Polul **J** se poate determina şi în cazul când se cunosc direcțiile accelerațiilor a două puncte A şi B precum şi $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$. Polul **J** se află la intersecția dreptelor, înclinate cu acelaşi unghi $\varphi = \text{arctg}\varepsilon/\omega^2$, în sensul

lui ε față de cele două direcții cunoscute ale accelerațiilor (v. fig. 8.17,b). Față de acest pol se pot reprezenta accelerațiile oricăror puncte aparținând aceluiași rigid în mișcare plan-paralelă.

8.6. MIȘCAREA CU PUNCT FIX

8.6.1. Definiție, exemple, grade de libertate

Un rigid efectuează o mișcare cu punct fix, atunci când un punct al rigidului sau al reperului solidar, rămâne tot timpul mișcării în repaus.

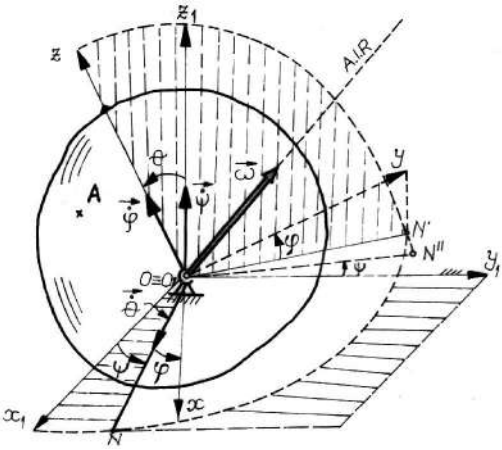


Fig. 8.18

În studiul mișcării rigidului cu punct fix se aleg două sisteme de referință: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ și unul mobil Oxyz solidar cu rigidul în mișcare, având originile în același pol fix $O_1 \equiv O$ (fig. 8.18). În consecință, poziția la un moment dat a rigidului poate fi stabilită numai cu unghiurile lui Euler: unghiul de precesie $\psi = \psi(t)$, unghiul de rotație proprie $\varphi = \varphi(t)$ și unghiul de nutație $\theta = \theta(t)$ unghiuri definite de mișcarea generală a rigidului (v. cap. 8.1.1). Deci, rigidul cu punct fix are trei grade de libertate corespunzătoare celor trei rotații pe care le poate efectua în jurul unor axe ce trec prin punctul fix $O_1 \equiv O$. Trecerea rigidului dintr-o poziție în alta se poate realiza prin trei rotații succesive în jurul axelor Oz_1, ON și Oz, modi- ficându-se pe rând cele trei unghiuri ψ, φ și θ.

După aceste axe sunt orientate vitezele unghiulare corespunzătoare: după axa Oz_1, viteza unghiulară de precesie $\dot{\psi}$; după axa nodurilor ON, viteza unghiulară de nutație $\dot{\theta}$ iar după axa Oz, viteza unghiulară de rotație proprie $\dot{\varphi}$. Viteza unghiulară instantanee a rigidului este egală cu suma

vectorială a vitezelor unghiulare de precesie, rotație proprie şi nutație (8.2):

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}}.$$

Aşa cum se poate observa în figura 8.18. traiectoria unui punct oarecare A al rigidului, este o curbă situată pe o sferă cu centrul în punctul fix O şi rază OA. Din această cauză mişcarea cu punct fix se mai numeşte **mişcare sferică.**

Ca exemple de corpuri în mişcare cu punct fix, putem da: **giroscopul** (fig. 8.19) este un volant greu ce se roteşte cu o viteză unghiulară $\dot{\varphi}$ mare în jurul axei proprii Oz, în timp ce se roteşte cu o viteză unghiulară de precesie $\dot{\psi}$ în jurul axei fixe O_1z_1; **titirezul** (fig. 8.20) are o mişcare de precesie în jurul axei fixe O_1z_1 şi o mişcare de rotație în jurul axei proprii Oz - presupunând unghiul de nutație θ = constant, viteza unghiulară de nutație este nulă iar viteza unghiulară instantanee rezultă prin compunerea vitezelor unghiulare de rotație proprie şi de precesie: $\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}}$; rotațiile unui automobil în viraj şi bilele unui rulment axial sunt, de asemenea, corpuri în mişcare cu punct fix.

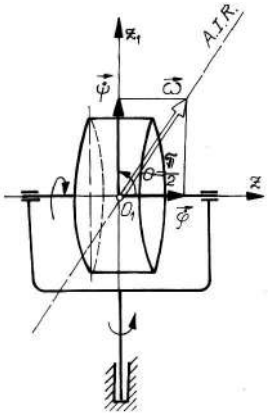


Fig. 8.19

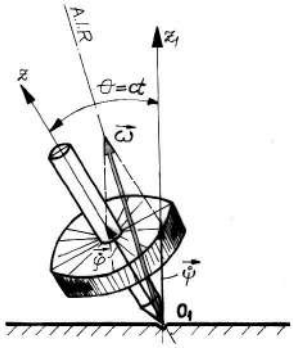


Fig. 8.20

8.6.2. Distribuția vitezelor

Distribuția vitezelor în mişcarea cu punct fix rezultă prin particularizarea relației lui Euler, ştiind că: $\vec{r}_O = 0$ şi $\vec{v}_O = 0$, iar viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}$ este un vector variabil în mărime şi direcție,

suportul trecând tot timpul prin punctul fix O_1. Deci:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \tag{8.49}$$

Expresia analitică este:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k}.$$

Componentele scalare ale vitezei în sistemul de referinţă mobil Oxyz, sunt:

$$v_x = z\omega_y - y\omega_z; v_y = x\omega_z - z\omega_x; v_z = y\omega_x - x\omega_y. \tag{8.50}$$

Pentru a găsi punctele de viteză nulă se pune condiţia:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = 0,$$

relaţie satisfăcută pentru $\vec{\rho} = 0$, adică punctul fix şi pentru

$$\vec{\rho} = \lambda\vec{\omega}, \tag{8.51}$$

adică în cazul când cei doi vectori $\vec{\rho}$ şi $\vec{\omega}$ sunt coliniari (λ un scalar).

Rezultă că punctele de viteză instantanee nulă se află pe o dreaptă ce trece prin punctul fix, care este suportul vectorului $\vec{\omega}$, numită **axă instantanee de rotaţie** (A.I.R.). Din relaţia (8.49) se observă că distribuţia de viteze la un moment dat se obţine ca şi cum rigidul s-ar roti cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul axei instantanee de rotaţie. În acest fel, mişcarea cu punct fix a rigidului se poate defini ca o mişcare de rotaţie în jurul unei axe instantanee ce trece tot timpul printr-un punct fix.

Axa instantanee de rotaţie îşi schimbă poziţia, atât faţă de reperul fix, cât şi faţă de cel mobil solidar cu rigidul.

Locul geometric al poziţiilor ocupate de axa instantanee de rotaţie în raport cu reperul fix este un con cu vârful în O_1, numit **con herpolodic**, iar locul geometric al axei instantanee de rotaţie în raport cu sistemul de referinţă mobil este tot un con cu vârful în O_1, numit **con polodic.**

Aceste două conuri sunt cunoscute şi sub numele de **conurile lui POINSOT**. În timpul mişcării rigidului, conul polodic se rostogoleşte fără alunecare pe conul herpolodic, generatoarea lor comună fiind axa instantanee de rotaţie la momentul respectiv.

Cele două conuri (numite şi axoidă fixă şi axoidă mobilă) pot fi tangente interior sau tangente exterior. În figura 8.21. se prezintă cazul

conurilor tangente exterior.

Ecuația axei instantanee de rotație față de sistemul mobil se obține din condiția de coliniaritate a vectorilor $\vec{\rho}$ şi $\vec{\omega}$ rezultând

$$\frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}, \qquad (8.52)$$

unde $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ - sunt proiecțiile vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ pe axele sistemului mobil de referință.

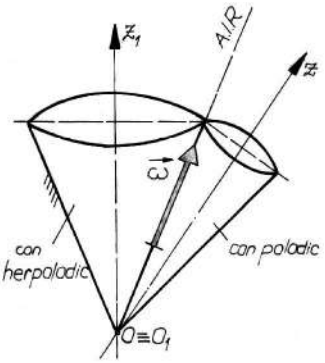


Fig. 8.21

Analog se deduc ecuațiile canonice ale axei instantanee de rotație față de sistemul de referință fix:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}}=\frac{y_1}{\omega_{y_1}}=\frac{z_1}{\omega_{z_1}}, \qquad (8.53)$$

unde $\omega_{x_1},\omega_{y_1},\omega_{z_1}$ - reprezintă proiecțiile vectorului $\vec{\omega}$ pe axele sistemului de referință fix.

8.6.3. Distribuția accelerațiilor

Pentru studiul accelerațiilor se consideră formula generală (8.6) a lui Euler în care $\vec{a}_O=0$, deoarece $O\equiv O_1$ sau derivând în raport cu timpul distribuția de viteze (8.49):

$$\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}). \qquad (8.54)$$

După cum se observă din relația (8.54), deşi formal distribuția de accelerații este analoagă cu cea din mişcarea de rotație cu axă fixă, diferența esențială între cele două mişcări constă în faptul că în mişcarea cu punct fix este un vector variabil în mărime şi direcție (suportul trecând tot timpul prin punctul fix O_1). În consecință, rezultă că $\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}$, este un vector al cărui suport este diferit de cel al lui $\vec{\omega}$, astfel încât $\vec{\varepsilon}\times\vec{\omega}\neq 0$.

Proiecțiile accelerației unui punct oarecare, pe axele sistemului de referință mobil, solidar cu rigidul rezultă din dezvoltarea relației (8.54):

$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z\\ x & y & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ z\omega_y-y\omega_z & x\omega_z-z\omega_x & y\omega_x-x\omega_y\end{vmatrix},$$

de unde se deduce:

$$\left.\begin{aligned}a_x&=-\left(\omega_y^2+\omega_z^2\right)x+\left(\omega_x\omega_y-\varepsilon_z\right)y+\left(\omega_x\omega_z+\varepsilon_y\right)z\\ a_y&=-\left(\omega_z^2+\omega_x^2\right)y+\left(\omega_y\omega_z-\varepsilon_x\right)z+\left(\omega_y\omega_x+\varepsilon_z\right)x\\ a_z&=-\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right)z+\left(\omega_z\omega_x-\varepsilon_y\right)x+\left(\omega_z\omega_y+\varepsilon_x\right)y\end{aligned}\right\} \qquad (8.55)$$

În continuare se va studia dacă există puncte de acceleraţie nulă. Pentru aceasta este necesar ca $a_x=a_y=a_z=0$ iar din relaţiile (8.55) rezultă un sistem de trei ecuaţii algebrice omogene, cu trei necunoscute. Pentru a se obţine soluţii diferite de soluţia banală x = y = z = 0, corespunzătoare punctului fix, este necesar ca determinantul sistemului să se anuleze. Se poate arăta că $\Delta=-\left(\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}\right)^2\neq 0,$ În cazul mişcării cu punct fix, vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ au în general, suporturi diferite, iar detreminantul este diferit de zero. Aceasta conduce la concluzia că în mişcarea cu punct fix nu mai există alte puncte de acceleraţie nulă, în afara celui fix, iar distribuţia de acceleraţii este specifică şi nu poate fi redusă la cea corespunzătoare unei alte mişcări particulare a rigidului.

8.7. PROBLEME REZOLVATE

1. Centrul O al roţii (1) de rază R se deplasează pe orizontală după legea $S_O=10\pi t(\mathrm{m})$ unde t este timpul. Roata (1) este cuplată cu roata (3) de rază R prin intermediul bielei (2) având centrul de masă în C. Ştiind că $OA=O_1B=0{,}25\mathrm{m},$ R = 0,5 m iar la momentul iniţial OA şi O_1B sunt pe verticală să se determine şi să se reprezinte viteza şi acceleraţia centrului C de masă al bielei (2) (fig. 8.22,a).

Rezolvare. Biela de cuplare (2) are o mişcare de translaţie. Tot

timpul mişcării $AB \| OO_1$. Coordonatele punctului A sunt:

$$x_A = S_O + O_1A\sin\varphi, y_A = R + OA\cos\varphi,$$

unde j este unghiul format de raza OA cu verticala. În cazul rostogolirii roții, fără alunecare, unghiul j este:

$$\varphi = \frac{S_O}{R} = \frac{10\pi t}{0,5} = 20\pi t.$$

Deci,

$$x_A = 10\pi t + 0,25\sin 20\pi t; y_A = 0,5 + 0,25\cos 20\pi t.$$

Proiecțiile vitezei şi acceleraţiei punctului A sunt:

$$\dot{x}_A = 10\pi + 5\pi\cos 20\pi t; \dot{y}_A = -5\pi\sin 20\pi t,$$

$$\ddot{x}_A = -100\pi^2\sin 20\pi t; \ddot{y}_A = -100\pi^2\cos 20\pi t.$$

Pentru timpul t=10s, rezultă $x_A = 100\pi m$; $y_A = 0,75m$; $\dot{x}_A = 15\pi m/s$; $y_A = 0$; $\ddot{x}_A = 0$; $\ddot{y}_A = -100\pi m/s^2$ iar $\varphi(10) = = 200\pi m = 100\cdot 2\pi$, adică punctele A şi B se află pe verticală (v. fig. 8.24,b).

Ştiind că $\vec{v}_A = \vec{v}_C = \vec{v}_B$ şi $\vec{a}_A = \vec{a}_C = \vec{a}_B$, rezultă:

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = 15\pi m/s;$$

$$a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2} = \sqrt{\ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2} = 100\pi m/s^2.$$

Vectorii viteză $\vec{v}_C$ şi acceleraţie $\vec{a}_C$ sunt reprezentaţi în figura 8.22,b.

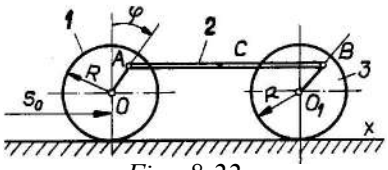


Fig. 8.22,a

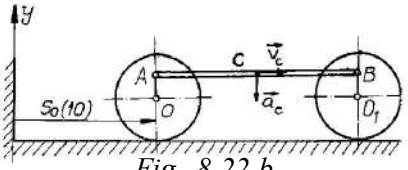


Fig. 8.22,b

2. Un corp de formă paralelipipedică având dimensiunile (2,4,4) m se roteşte în jurul unei axe fixe, care coincide cu diagonala OD, cu viteza unghiulară w = 3 t + 3, rad/s, unde t este timpul. Să se determine la t = 2s

viteza şi acceleraţia vârfurilor A şi B (fig. 8.23).

Rezolvare. Conform relaţiei (8.20) privind distribuţia de vitezе în mişcarea de rotaţie cu axă fixă, rezultă:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times OA = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{j} - 12\vec{k},$$

unde: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{OD} = \omega \dfrac{OD}{|OD|} = 9\dfrac{2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{4+16+16}} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}\,\text{m/s},$

$\omega = 9\text{rad/s} \text{ la } t = 2\text{s}.$

Mărimea

$$v_A = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}\,\text{m/s}.$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times OB = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 12\vec{j},$$

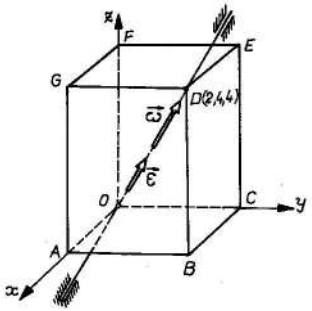


Fig. 8.23

iar $v_B = \sqrt{12^2 + 24^2} = 12\sqrt{5}\,\text{m/s}.$

Acceleraţia punctelor A şi B conform distribuţiei (8.23) este:

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times OA + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times OA) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= -144\vec{i} + 40\vec{j} + 32\vec{k},$$

unde $\varepsilon = 3\text{rad/s} \text{ iar } \vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{e}_{OD} = 3 \cdot \dfrac{2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{36}} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$

Mărimea acceleraţiei $a_A = \sqrt{144^2 + 40^2 + 32^2} = 152{,}83\,\text{m/s}^2.$

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}\times OB + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times OB) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ -24 & 12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -80\vec{i} - 140\vec{j} + 180\vec{k}.$$

Modulul acceleraţiei $a_B = \sqrt{80^2 + 140^2 + 180^2} = 241{,}66 \text{m/s}^2$.

3. Şurubul de antrenare (4) al unei prese cu fricţiune are pasul p = 0,02 m. El este antrenat de discurile verticale (1) şi (2) cu ax orizontal prin intermediul discului (3) de rază R = 0,5 m, solidar cu şurubul de antrenare (4) (v. fig. 8.24). Turaţia discului de antrenare este n = 300rot/min. Datorită deplasării şurubului în timpul funcţionării, raza la care se face contactul între cele două discuri variază. În momentul iniţial, când ele iau contact $r = r_O = 0{,}2\text{m}$, iar cursa este S=0,3 m.

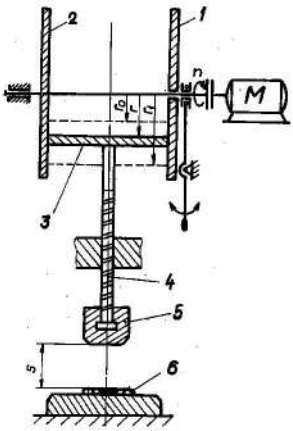


Fig. 8.24

Să se determine:

a) legile de mişcare ale şurubului $\omega_4 = \omega_4(t)$ şi $v_4 = v_4(r)$;

b) viteza nicovalei superioare (5) când ia contact cu piesa pentru forjat (6).

Rezolvare:

a) viteza unghiulară a discurilor (1) şi (2) de antrenare este: $\omega_1 = \dfrac{\pi \cdot n}{30}$.

Viteza unghiulară a discului (3) solidar cu şurubul (4), pentru o poziţie intermediară, este:

$$\omega_4 = \frac{r \cdot \omega_1}{R} = \frac{\pi \cdot n \cdot r}{30R}.$$

Viteza de înaintare a şurubului (4) conform relaţiei (8.36) este:

$$v_4 = \frac{p}{2\pi}\cdot\omega_4 = \frac{p\cdot n}{60R}.$$

b) La capătul cursei, în momentul impactului, raza r este: $r_1 = r_O + S$. Deci:

$$v_4 = \frac{p\cdot n\cdot(r_O+S)}{60R} = \frac{0{,}02\cdot 300(0{,}2+0{,}3)}{60\cdot 0{,}5} = 0{,}1\text{m/s}.$$

4. Să se determine baza şi rostogolitoarea barei OA ce execută o mişcare plană. În capătul O al barei este articulat un culisor ce se deplasează pe un ghidaj vertical cu viteza constantă $\vec{v}_O$. În acelaşi tip, bara OA alunecă în interiorul manşonului articulat în O_1, situat la distanţa d faţă de ghidajul vertical.

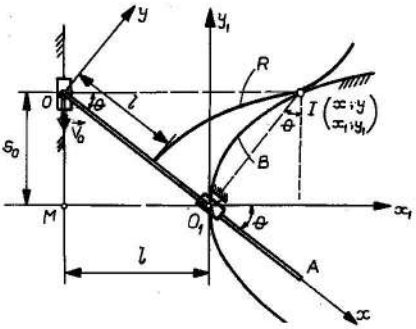


Fig. 8.25

Rezolvare. Se aleg cele două sisteme de referinţă fix, $O_1x_1y_1$ şi mobil Oxy, solidar cu bara OA, ca în figura 8.25. Legea de mişcare a originii sistemului de coordonate mobil este: $S_O = l\text{tg}\theta$.

Derivând în raport cu timpul se obţine viteza punctului O:

$$v_O = \dot{S}_O = \frac{l}{\cos^2\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{l\cdot\omega}{\cos^2\theta},$$

de unde: $\omega = \dfrac{v_O\cdot\cos^2\theta}{l}$.

Componentele scalare pe axele mobile ale vitezei $\vec{v}_O$ sunt:

$$v_{Ox} = -v_O\sin\theta;\quad v_{Oy} = -v_O\cos\theta.$$

Coordonatele față de sistemul fix ale originii sistemului mobil sunt:

$x_O = -l; y_O = l \cdot tg\theta.$

Ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei se obțin utilizând relațiile (9.43):

$$x = -\frac{v_{Oy}}{\omega} = \frac{l}{\cos\theta}; y = \frac{v_{Ox}}{\omega} = \frac{l \cdot \sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Eliminând parametrul variabil θ între ecuațiile (8.49) rezultă ecuația rostogolitoarei, o curbă plană de gradul IV:

$$x^4 - l^2\left(x^2 + y^2\right) = 0. \tag{8.50}$$

Ecuațiile bazei rezultă, utilizând relațiile (8.46):

$$\begin{cases} x_1 = x_O + x\cos\theta + y\sin\theta = -l + \dfrac{l}{\cos\theta}\cos\theta + \dfrac{l \cdot \sin\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta = l \cdot tg^2\theta; \\ y_1 = y_O - x\sin\theta + y\cos\theta = l \cdot tg\theta - \dfrac{l}{\cos\theta}\sin\theta + \dfrac{l \cdot \sin\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta = l \cdot tg\theta. \end{cases} \tag{8.51}$$

Eliminând parametrul geometric variabil q între ecuațiile parametrice (8.51) ale centroidei fixe, rezultă ecuația unei parabole cu vârful în O_1, simetrică față de O_1x_1:

$$y_1^2 = l \cdot x_1. \tag{8.52}$$

Cele două locuri geometrice s-au reprezentat în figura 8.25.

Soluția analitică: locurile geometrice ale centrului instantaneu de rotație se pot determina analitic, aplicând teoria generală a locurilor geometrice. Se construiește centrul instantaneu de rotație **I**, care se află la intersecția perpendicularelor ridicate pe suporturile vitezelor - ghidaje.

Coordonatele centrului instantaneu de rotație în cele două sisteme de referință sunt:

- în sistemul de referință mobil - ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei:

$$x = OO_1 = \frac{l}{\cos\theta}; y = O_1I = OO_1 tg\theta = \frac{l \cdot \sin\theta}{\cos^2\theta};$$

- în sistemul de referință fix - ecuațiile parametrice ale bazei:

$x_1 = O_1 I \sin\theta = l \cdot tg^2\theta; y_1 = O_1 I \cos\theta = l \cdot tg\theta.$

Rezultatele sunt aceleaşi cu cele obținute anterior prin aplicarea ecuațiilor (8.43) şi (8.46).

5. Elementul (2) de lungime l din figura 8.28 execută o mişcare plană, în timp ce manivela (1) de lungime $O_1O = O_1C = b$ se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω_1, în jurul articulației O_1. Elementul (2) al mecanismului alunecă în manşonul (3) articulat în C. Să se determine:

a) baza şi rostogo- litoarea mişcării plane a elementului (2); b) vitezele punctelor A şi C ale barei (2);

c) polul acceleraţiilor; d) acceleraţiile punctelor A şi C.

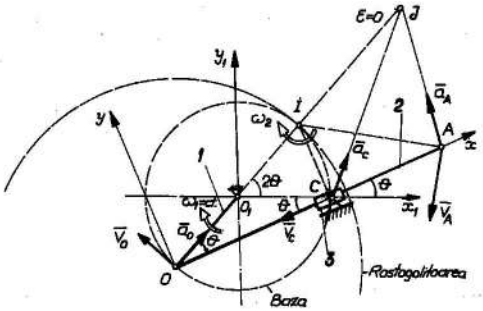


Fig. 8.26

Rezolvare. a) Se aleg axele de coordonate ca în figura 8.26. Se stabileşte poziția lui I centrul instantaneu al barei (2) ridicând perpendiculare în O şi C pe direcțiile vitezelor $\vec{v}_O$ şi $\vec{v}_C$. Coordonatele lui I în sistemul fix $O_1x_1y_1$ sunt:

$x_1 = b\cos 2\theta; y_1 = b\sin 2\theta.$

Eliminând parametrul geometric variabil q rezultă baza:

$x_1^2 + y_1^2 = b^2$, un cerc de rază b cu centrul în C_1.

Coordonatele lui I în sistemul mobil Oxy sunt:

$x = 2b\cos\theta; y =$

$= 2b\sin\theta.$

Prin eliminarea lui q, rezultă rostogolitoarea:

$x^2 + y^2 = 4b^2$,

un cerc de rază 2b cu centrul în O, tangent în I la bază.

b) Viteza unghiulară instantanee a barei (2) rezultă astfel:

$v_O = OI \cdot \omega_2$ de unde $\omega_2 = \frac{v_O}{OI} = \frac{b\omega_1}{2b} = \frac{\omega_1}{2}$.

Vitezele punctelor A şi C ale barei (2) sunt:

$$v_A = \omega_2 \cdot IA = \frac{\omega_1}{2}\sqrt{4b^2 + l^2 - 4bl\cos\theta}; v_C = \omega_2 \cdot IC =$$

$$= \omega_1 b \sin\theta = v_O \sin\theta.$$

c) Pentru determinarea polului acceleraţiilor, sunt necesare: acceleraţia unui punct al barei, viteza unghiulară ω_2 şi acceleraţia ε_2.

Acceleraţia punctului O care descrie o traiectorie circulară este:

$$a_O = a_O^v = \frac{v_O^2}{b} = b \cdot \omega_1^2.$$

Acceleraţia unghiulară a barei (2) este:

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{2} = 0, \text{ deoarece } \omega_1 = ct.$$

Aplicând relaţiile (8.61) rezultă poziţia polului acceleraţiilor J:

$$OJ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4}} = 4b; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} = 0.$$

Polul J se află în prelungirea suportului acceleraţiei normale a_O la distanţa 4b faţă de O (v. fig. 8.28).

d) Acceleraţiile punctelor A şi C sunt normale şi orientate spre polul J deoarece acceleraţia ε_2 este nulă:

$$a_A = \omega_2^2 \cdot JA = \frac{\omega_1^2}{4}\sqrt{16b^2 + l^2 - 8bl\cos\theta},$$

$$a_C = \omega_2^2 \cdot JC = \frac{\omega_1^2 b}{2}\sqrt{4 - 3\cos^2\theta}.$$

Cu ajutorul lui I şi J se pot determina, ca în mişcarea de rotaţie, vitezele, respectiv acceleraţiile tuturor punctelor barei (2).

6. Rola conică a unui rulment axial (fig.8.29)se rostogoleşte fără

alunecare pe o cale de rulare de asemenea conică, rotindu-se în jurul axei de simetrie a căii de rulare conice cu viteza unghiulară ω_1. Conul din care se poate considera că poate să facă parte rola, are unghiul la vârf 2α şi înălţimea OC = R. Raza bazei mari a rolei este r = R tgα. Unghiul la vârf al conului care reprezintă calea de rulare este 2b. Se cer să se determine:

a) viteza de rotaţie proprie $\omega_2 = \dot{\varphi}$; b) viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}$; c) viteza şi acceleraţia unui punct B situat la periferia rolei; d) ecuaţiile axei instantanee de rotaţie.

Rezolvare. Se aleg axele de referinţă ca în figura 8.27. Se vede că unghiul de nutaţie este constant şi are valoarea:

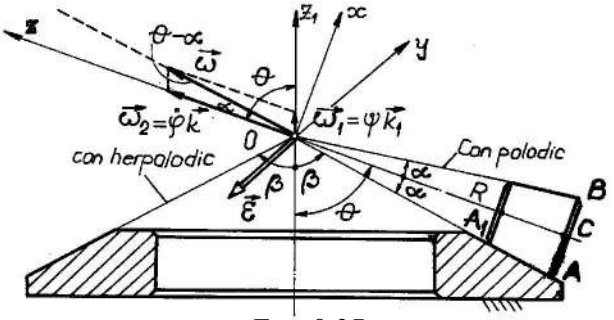


Fig. 8.27

$\theta = \alpha + \beta = \text{ct. deci } \dot{\theta} = 0.$

Rola conică execută o mişcare de precesie regulată.

a) Viteza unghiulară de rotaţie proprie, $\dot{\varphi}$ rezultă aplicând teorema sinusului în triunghiurile respective (v. fig. 8.29):

$$\frac{\dot{\psi}}{\sin\alpha} = \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta-\alpha)} \text{ deci } \dot{\varphi} = \omega_2 = \dot{\psi}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

b) Viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}$, în sistemul de referinţă mobil Oxyz solidar cu rola se calculează cu relaţiile (8.72):

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \dot{\psi}\frac{R}{r}\sin\theta\,\vec{k},$$

unde: $\vec{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\cdot\vec{k} = \dot{\psi}\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}\vec{k}$,

$\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\cos(90^\circ-\theta)\sin\varphi\,\vec{i} + \dot{\psi}\cos(90^\circ-\theta)\cos\varphi\,\vec{j} + \dot{\psi}\cos\theta\vec{k}$

iar $\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta = \dot{\psi}\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha} + \dot{\psi}\cos\theta = \dot{\psi}\,\mathrm{ctg}\alpha\sin\theta = \dot{\psi}\dfrac{R}{r}\sin\theta.$

Accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ conform relației (8.72) este:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\dot{\psi}}\times\vec{\dot{\varphi}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi & \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi & \dot{\varphi}\cos\theta \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\psi}\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha} \end{vmatrix} =$$

$$= \dot{\psi}^2\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin\theta}{\sin\alpha}\left(\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}\right).$$

c) Viteza unui punct B de la periferia rolei este:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}\times\vec{OB} = \dot{\psi}\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \dfrac{R}{r} \\ r & 0 & -R \end{vmatrix} =$$

$$\omega_1\sin\theta\cdot\left[-R\cos\varphi\,\vec{i} + R(1+\sin\varphi)\vec{j} - r\cos\varphi\vec{k}\right]$$

Pentru $\theta = 90^\circ$ şi $\varphi = 0$ rezultă: $\vec{v}_B = \omega_1 R\cdot\left(-\vec{i} + \vec{j} - \dfrac{r}{R}\vec{k}\right)$.

Accelerația unui punct B de pe periferia rolei conform relației (8.69) este:

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}\times\vec{OB} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{OB}\right) = \dot{\psi}^2\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin\theta}{\sin\alpha}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ r & 0 & -R \end{vmatrix} +$$

$$+\dot{\psi}^2\sin^2\theta\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \dfrac{R}{r} \\ -R\cos\varphi & R(1+\sin\varphi) & -r\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Pentru $\theta = 90^\circ$ şi $\varphi = 0$ rezultă: $\vec{a}_B = -R\omega_1^2\left[\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)\vec{i} - \vec{k}\right]$.

d) Ecuaţiile axei instantanee de rotaţie faţă de sistemul mobil sau ecuaţiile parametrice ale conului polodic sunt date de relaţiile (8.65):

$$\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{y}{\cos\varphi} = \frac{z}{\mathrm{ctg}\alpha}$$

8.8. PROBLEME PROPUSE

1. O instalaţie care transportă piese într-un cuptor pentru uscare (fig. 8.28) este alcătuită dintr-un braţ articulat OA care se roteşte într-un plan vertical şi o bară AB în capătul căreia este fixat suportul pe care se aşează piesele.în timpul mişcării instalaţiei, bara AB este verticală. Să se stabilească dependenţa dintre unghiul de rotaţie j al braţului articulat şi timp, astfel încât viteza piesei aşezate pe suport să fie constantă şi egală cu 0,05 m/s. Să se determine, de asemenea, traiectoria punctului B dacă AB = 0,8 m, OA = 1,5 m iar la momentul iniţial j = 0.

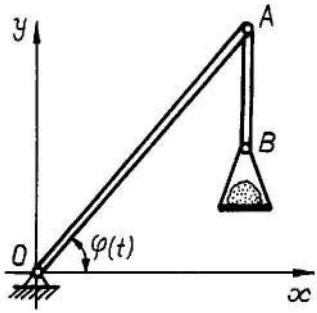


Fig. 8.28

R. $\varphi(t) = \frac{1}{30}t$ (rad); $x^2 + (y + 0{,}8)^2 = 2{,}25$ (m^2).

2. Punctul A situat la mijlocul bielei BC a mecanismului paralelogram din figura 8.29, se mişcă uniform accelerat. Acceleraţia tangenţială a acestui punct este $a_A^\tau = 5$ m/s^2. Lungimea bielei BC = 1 m iar a manivelelor OB = CD = 0,5 m. La începutul mişcării bara OB se află în poziţie orizontală iar viteza unghiulară este nulă. Să se determine:

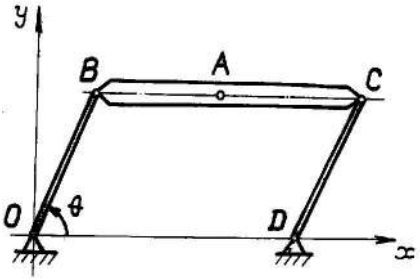


Fig. 8.29

a) traiectoria punctului A;
b) viteza şi accelerația unghiulară a manivelelor;
c) viteza şi accelerația punctului B.

R. a) $(x_A - \frac{BC}{2})^2 + y_A^2 = OB^2$;

b) $\omega = 10\,t$ rad/s; $\varepsilon = 10$ rad/s^2;

c) $v_B = 5\,t$ m/s; $a_B = 5\sqrt{1+100t^2}$ m/s^2;

3. În figura 8.30 este prezentată o bicicletă de antrenament (axele roților sunt fixe). Să se determine unghiul de rotație al pedalei ca funcție de timp, în aşa fel încât bicicleta să parcurgă într-o oră 30 km. Raportul dintre numărul de dinți ai pinionului conducător şi ai pinionului condus al roții este egal cu 2 iar raza roții din spate este 0,5 m. Să se determine, de asemenea viteza unghiulară şi numărul de rotații pe minut al roții dințate motoare (a pedalelor), presupunând că rotația este uniformă.

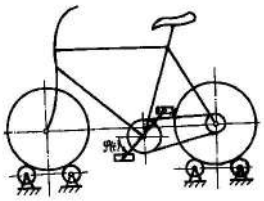


Fig. 8.30

R. $\varphi = 8{,}33\,t$ rad; $\omega = 8{,}33$ rad/s; $n = 79{,}6$ rot/min.

4. Rotorul unei pompe centrifuge se roteşte uniform în jurul unui ax

fix (fig. 8.31) cu o turaţie n = 2135 rot/min. Să se determine: a) viteza şi acceleraţia unghiulară a rotorului; b) viteza şi acceleraţia punctului A situat la distanţa OA = 0,2 m.

R.a) $\omega = 223{,}46$ rad/s; $\varepsilon = 0$;

b) $v = 44{,}7$ m/s; $a_\tau = 0$; $a_\nu = 9987{,}17$ m/s^2.

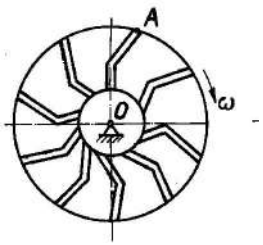


Fig. 8.31

5. Balansierul unui ceas execută oscilaţii de torsiune după o lege sinusoidală cu perioada T = 0,5 s şi aplitudinea $\alpha = \pi/3$ rad. Să se determine spaţiul parcurs de punctul A, care se află la periferia balansierului (fig. 8.32) în timp de 1 sec. de la începerea mişcării, dacă raza OA = 5 mm. Să se calculeze de asemenea coordonata curbilinie s a punctului A, pentru aelaşi interval de timp t = 1 s, dacă la momentul iniţial unghiul de rotaţie al balansierului este zero.

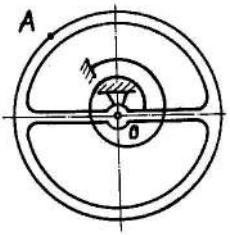


Fig. 8.32

R. $S = 13{,}3\,\pi$ mm; $s = 0$.

6. Cremaliera 1 (fig. 8.33) se deplasează pe orizontală după legea $S = a\,t^3$ (m) şi pune în mişcare pinioanele 2 şi 3. Pe pinionul 3 este înfăşurat un fir inextensibil în capătul căruia se află prisma B. Să se determine viteza şi acceleraţia prismei B.

R. $v = 3\,a\,t^2$ m/s; $a = 6\,a\,t$ m/s^2.

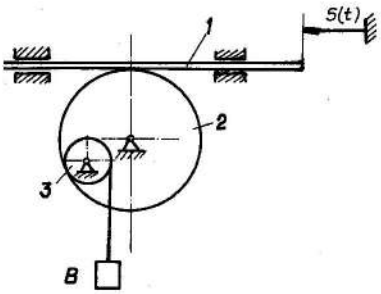


Fig. 8.33

7. Un excentric executat sub forma unui disc de rază r, se roteşte în jurul unui ax ce trece prin O după legea $\varphi = \varphi(t)$. Excentricul pune în mişcare tija AB, a cărei axă trece prin punctul O. Să se determine viteza punctului B dacă excentricitatea OC = e iar la momentul iniţial $\varphi = 0$ (fig. 8.34).

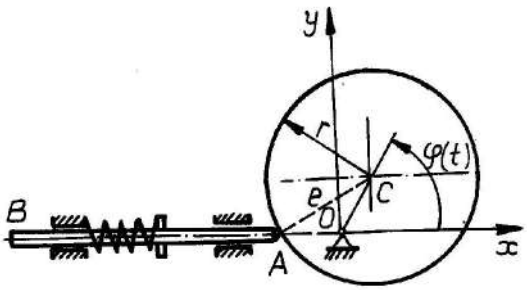


Fig. 8.34

R. $v = \left[\left(e - \dfrac{e^2 \cos\varphi}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\varphi}}\right) \cdot \sin\varphi\right] \cdot \varphi$

8. Ecuaţia în coordonate polare a profilului excentricului din figura 8.35, ce se roteşte în jurul unei axe ce trece prin O, are forma: $\rho = \rho_o + b\,|\sin\varphi|$. Să se determine la timpul t = 2/3 secunde după începerea mişcării viteza şi acceleraţia punctului A_1 al excentricului şi a punctului A_2 ce aparţine tijei AB, ce apasă asupra lui prin intermediul unui arc. Excentricul se roteşte uniform cu viteza unghiulară $\omega = p/2$ rad/s, ρ_o = 0,02 m iar b = 0,04 m. La momentul iniţial unghiul $\varphi = 0$.

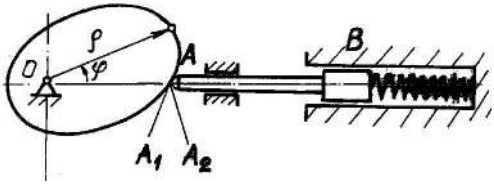


Fig. 8.35

R.
$$v_{A_1} = 8{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$
$$v_{A_2} = v_B = 3.14 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$
$$a_{A_1} = 13.48 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$
$$a_{A_2} = a_B = 8.54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s};$$

9. Sfera 1 de rază $\rho_1 = 0{,}1$ m, a unui variator cu fricțiune (fig. 8.36 este pusă în mişcare de rotație de rola 2 de rază $r_2 = 0{,}05$ m, fixată pe acelaşi ax cu roata dințată conică 3 de rază $r_3 = 0{,}08$ m. Roata 3 este antrenată de roata conducătoare de rază $r_4 = 0{,}06$ m ce se roteşte după legea $\varphi_4 = t^2 - 2t$ (rad). Considerându-se că rola 2 nu alunecă pe sfera 1, să se determine: a) accelerația punctului M situat pe sfera 1, la timpul t = 1 sec. după începerea mişcării; b) viteza unghiulară şi accelerația unghiulară a sferei dacă $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$ iar la momentul inițial $\varphi_4 = 0$.

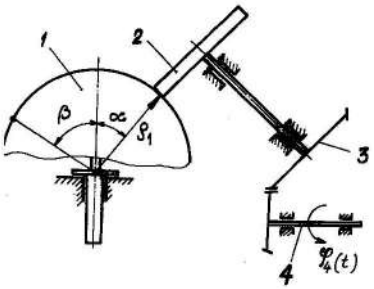


Fig. 8.36

R. a) $a_M = 0{,}13$ m/s^2;

b) $\omega_1 = 0$; $\varepsilon_1 = 1{,}5$ rad/s^2.

9.

MIŞCAREA RELATIVĂ

9.1. Mişcarea relativă a punctului material 241
9.1.1. Generalităţi 241
9.1.2. Derivata absolută şi relativă (locală) a unui vector 242
9.1.3. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a punctului 243
9.1.4. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a punctului 244
9.2. Mişcarea relativă a rigidului 246
9.2.1. Generalităţi 246
9.2.2. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a rigidului 246

9.2.3. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a rigidului 247
9.3 Probleme rezolvate 248
9.4 Probleme propuse 252

9

MIŞCAREA RELATIVĂ

9.1. MIŞCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL

9.1.1. Generalităţi

În capitolele precedente a fost studiată mişcarea unui punct material şi a unui solid rigid prin raportare directă la un sistem de referinţă fix. În tehnică, există însă numeroase situaţii în care este necesar sau mai avantajos să raportăm mişcarea punctului sau rigidului, la un sistem de referinţă fix, prin intermediul unui sistem de referinţă mobil, a cărui mişcare este cunoscută. Deci, presupunând cunoscuţi parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea punctului şi rigidului în raport cu reperul mobil şi parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea sistemului de referinţă mobil faţă de cel fix, ne propunem să determinăm parametrii cinematici care definesc mişcarea punctului sau a rigidului faţă de sistemul de referinţă fix.

Se ştie că în natură nu există sisteme de referinţă fixe, dar, pentru majoritate problemelor, sistemele de referinţă legate de Pământ pot fi considerate fixe.

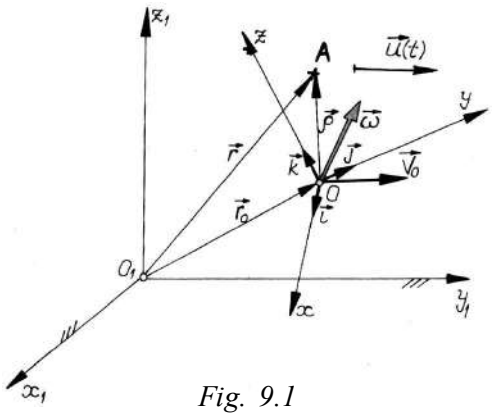


Fig. 9.1

Pentru început se va studia mişcarea unui punct A (fig. 9.1) faţă de sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ prin intermediul sistemului de referinţă mobil Oxyz. Mişcarea sistemului de referinţă mobil, faţă de cel fix este cunoscută prin vectorii

$\vec{v}_O$ şi $\vec{\omega}$. Mişcarea punctului A (sau a unui rigid) faţă de sistemul de referinţă fix, se numeşte **mişcare absolută**; traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului corespunzătoare acestei mişcări se numesc absolute. Mişcarea punctului A (sau a unui rigid) faţă de sistemul de referinţă mobil se numeşte **mişcare relativă**; traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului corespunzătoare acestei mişcări se numesc relative. Mişcarea punctului A (sau a unui rigid) presupus solidar cu sistemul de referinţă mobil, în raport cu sistemul de referinţă fix, se numeşte **mişcare de transport**; traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului corespunzătoare acestei mişcări se numesc de transport. Mişcarea de transport se poate obţine anulând mişcarea relativă.

În general, în aplicaţiile practice se cer determinate elementele mişcării absolute când se cunosc elementele mişcării relative şi a celei de transport.

9.1.2. Derivata absolută şi relativă (locală) a unui vector

Dezvoltările din acest capitol implică şi problema determinării derivatei în raport cu timpul a unui vector variabil (în mărime şi direcţie) exprimat prin proiecţiile sale pe axele unui sistem de referinţă mobil.

În figura 9.1 se consideră vectorul $\vec{U}(t)$ definit în sistemul de referinţă mobil Oxyz prin expresia analitică:

$$\vec{U}(t) = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}. \tag{9.1}$$

Prin derivare în raport cu timpul se obţine:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \left(\dot{U}_x\vec{i} + \dot{U}_y\vec{j} + \dot{U}_z\vec{k}\right) + \left(U_x\dot{\vec{i}} + U_y\dot{\vec{j}} + U_z\dot{\vec{k}}\right). \tag{9.2}$$

Ţinând seama de relaţiile lui Poisson (7.11), paranteza a doua din membrul drept, devine:

$$\left(U_x\dot{\vec{i}} + U_y\dot{\vec{j}} + U_z\dot{\vec{k}}\right) = U_x\left(\vec{\omega}\times\vec{i}\right) + U_y\left(\vec{\omega}\times\vec{j}\right) + U_z\left(\vec{\omega}\times\vec{k}\right) = \vec{\omega}\times\vec{U}.$$

Relaţia (9.2) se scrie astfel:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \left(\dot{U}_x\vec{i} + \dot{U}_y\vec{j} + \dot{U}_z\vec{k}\right) = \vec{\omega}\times\vec{U}. \tag{9.3}$$

Termenul din membrul stâng al egalităţii (9.3) reprezintă derivata vectorului $\vec{U}(t)$ faţă de sistemul de referinţă fix, se numeşte derivata

absolută şi se notează:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \dot{\vec{U}}. \tag{9.4}$$

Prima paranteză din membrul drept al egalităţii (9.3) reprezintă derivata vectorului $\vec{U}$ faţă de sistemul mobil, ca şi cum acesta ar fi fix, adică versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nu-şi schimbă direcţia.

Această derivată este denumită locală sau relativă şi se notează convenţional (nu este derivată parţială):

$$\left(\dot{U}_x \vec{i} + \dot{U}_y \vec{j} + \dot{U}_z \vec{k}\right) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}. \tag{9.5}$$

În final relaţia (9.3) se scrie:

$$\dot{\vec{U}} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{U}. \tag{9.6}$$

Relaţia (9.6) reprezintă formula după care se calculează derivata absolută a unui vector variabil în mărime şi direcţie, definit prin proiecţiile sale pe axele unui sistem de referinţă mobil. În această formulă $\vec{\omega}$ reprezintă viteza unghiulară a sistemului mobil faţă de cel fix.

Observaţii. 1) Când $\vec{\omega}=0$ sau $\vec{\omega} \| \vec{U}$, derivata absolută este egală cu derivata relativă a vectorului respectiv;

2) Derivata absolută a vectorului $\vec{\omega}$ este egală cu derivata sa relativă

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \text{ deoarece } \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0;$$

3) Derivata absolută a unui vector constant în mărime, variabil în direcţie este $\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{U}$ deoarece $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$ (vezi relaţia (7.10).

9.1.3. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a punctului

În figura 9.1 se consideră punctul A în mişcare atât faţă de sistemul de referinţă mobil Oxyz cât şi faţă de cel fix $O_1x_1y_1z_1$. Poziţia punctului A se exprimă prin vectorii de poziţie $\vec{r}$, faţă de sistemul fix şi $\vec{\rho}$ faţă de cel mobil. Poziţia originii O a sistemului mobil faţă de cel fix este dată de

vectorul de poziție $\vec{r}_O$. Între aceşti vectori de poziție există relația:

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \tag{9.7}$$

Derivând în raport cu timpul relația (9.7) se obține:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{\rho}} = \vec{v}_O + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{9.8}$$

Pentru calculul derivatei $\dot{\vec{\rho}}$ s-a aplicat formula (9.6). După definițiile date mai înainte rezultă că s-au obținut:

- viteza absolută, viteza punctului A față de sistemul fix:

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{9.9}$$

- viteza relativă, viteza punctului A față de sistemul mobil, ca şi cum acesta ar fi fix:

$$\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}, \tag{9.10}$$

- viteza de transport a punctului A, solidar legat de sistemul de referință mobil, în mişcare față de sistemul fix:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{9.11}$$

Cu aceste notații, relația (9.8) devine:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t. \tag{9.12}$$

După relația (9.12) se compun vitezele în mişcarea relativă a punctului material şi anume: viteza absolută a unui punct este egală cu suma vectorială între viteza relativă şi viteza de transport.

Observație. Cele două mişcări relativă şi de transport, se pot studia separat şi independent, iar apoi să se însumeze efectele.

9.1.4. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a punctului

Pentru calculul acceleraţiilor se derivează în raport cu timpul relația (9.8):

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}_O + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}\right) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}. \tag{9.13}$$

Vectorul $\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}$ este definit prin proiecţiile sale pe axele sistemului de referință mobil şi ca urmare derivata sa se calculează cu formula (9.6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}\right)+\vec{\omega}\times\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}=\frac{\partial^2\vec{\rho}}{\partial t^2}+\vec{\omega}\times\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}. \tag{9.14}$$

iar

$$\dot{\vec{\rho}}=\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}. \tag{9.15}$$

Înlocuind relaţiile (9.15) şi (9.14) în (9.13) rezultă:

$$\ddot{\vec{r}}=\vec{a}_O+\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right)+\frac{\partial^2\vec{\rho}}{\partial t^2}+2\vec{\omega}\times\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}. \tag{9.16}$$

Dacă în relaţia (9.16) se pun în evidenţă elementele caracteristice mişcării absolute, mişcării relative şi mişcării de transport se constată că:

- acceleraţia absolută a punctului A în raport cu sistemul de referinţă fix este:

$$\vec{a}_a=\ddot{\vec{r}}, \tag{9.17}$$

- acceleraţia de transport, acceleraţia punctului A solidar legat de sistemul de referinţă mobil, în mişcare faţă de sistemul de referinţă fix este:

$$\vec{a}_t=\vec{a}_O+\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right), \tag{9.18}$$

- acceleraţia relativă, acceleraţia punctului A faţă de sistemul mobil ca şi cum ar fi fix este:

$$\vec{a}_r=\frac{\partial^2\vec{\rho}}{\partial t^2}. \tag{9.19}$$

Se observă că în expresia acceleraţiei absolute (9.16) există un termen care nu aparţine nici acceleraţiei relative şi nici celei de transport. Acest termen a fost pus pentru prima dată în evidenţă de inginerul francez GUSTAV CORIOLIS (1792 - 1843) şi a fost numit **acceleraţie complementară** sau **acceleraţie Coriolis:**

$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}\times\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r. \tag{9.20}$$

Cu aceste notaţii relaţia (9.16) devine:

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_t+\vec{a}_c \tag{9.21}$$

După relaţia (9.21) se compun acceleraţiile în mişcarea relativă a punctului. Ea arată că acceleraţia absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre acceleraţia relativă, acceleraţia de transport şi acceleraţia Coriolis.

Referitor la accelerația Coriolis $\vec{a}_c$, ea exprimă influența simultană a mișcării de rotație a sistemului mobil și a mișcării relative a punctului asupra accelerației absolute a acestuia. Accelerația Coriolis este un vector perpendicular pe planul definit de vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{v}_r$, iar sensul se determină cu regula șurubului drept. Modulul accelerației Coriolis este:

$$a_c = 2|\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}_r| \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_r). \qquad (9.22)$$

Se observă că accelerația Coriolis este nulă când $\vec{\omega} = 0$, adică în cazul în care sistemul de referință mobil are o mișcare de translație, sau dacă vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{v}_r$ sunt paraleli.

9.2. MIȘCAREA RELATIVĂ A RIGIDULUI

9.2.1. Generalități

În capitolul 8 s-a studiat cinematica rigidului față de un reper considerat fix. În cele ce urmează se va studia mișcarea rigidului atât față de reperul fix, cât și față de cel mobil, pentru a se stabili relațiile între vitezele și accelerațiie unui punct al rigidului în cele două repere.

În figura 9.2 se consideră un rigid C în mișcare, căruia i se atașează triedrul $T_2(O_2x_2y_2z_2)$.

Se mai consideră triedrul mobil, intermediar $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și triedrul fix $T_0(O_0x_0y_0z_0)$. Se cunoaște mișcarea relativă a corpului C față de reperul mobil T_1, prin viteza $\vec{v}_{21}$ a originii triedrului T_2 și viteza unghiulară $\vec{\omega}_{21}$. Mișcarea reperului mobil T_1 față de reperul fix T_O, se cunoaște prin viteza $\vec{v}_{10}$ a originii triedrului T_1 și viteza unghiulară $\vec{\omega}_{10}$.

9.2.2. Compunerea vitezelor în mișcarea relativă a rigidului

Pe baza definițiilor date mai înainte vitezelor absolute, relative și de transport, se vor calcula vitezele unui punct oarecare A (fig. 9.2). Poziția acestui punct este definită de vectorul de poziție $\vec{r}_2$ față de reperul T_2, prin vectorul $\vec{r}_1$ față de reperul mobil T_1 și $\vec{r}_O$ față de cel fix T_0.

Viteza relativă a punctului A este viteza lui A față de reperul T_1, punctul fiind solidar legat de reperul T_2 :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2. \tag{9.23}$$

Viteza de transport este viteza punctului A considerat solidar legat de reperul T_1, în mişcare față de reperul fix T_O :

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_1. \tag{9.24}$$

Viteza absolută se obține prin însumarea vectorilor $\vec{v}_r$ şi $\vec{v}_t$ conform relației (9.12):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{10} + \vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2. \tag{9.25}$$

Relația (9.25) se poate generaliza uşor considerând triedrul fix To, triedrele intermediare $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ mobile şi triedrul T_n solidar legat de corpul C în mişcare. Vectorii de poziție şi punctul A față de reperele mobile vor fi $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$. Deci:

$$\vec{v}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{r}_i. \tag{9.26}$$

9.2.3. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a rigidului

Considerând din nou reperele T_O, T_1 şi T_2 şi rigidul din figura 9.2, acceleraţia absolută a unui punct A, oarecare, este suma vectorială (9.21):

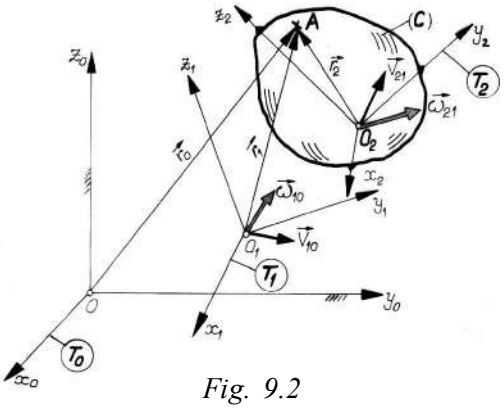


Fig. 9.2

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c$.

Mişcarea relativă a triedrului T_2 faţă de triedrul T_1 este definită prin parametrii cinematici $\vec{a}_{21}, \vec{\varepsilon}_{21}$ şi $\vec{\omega}_{21}$. Mişcarea de transport a triedrului T_1 faţă de triedrul T_O este definită prin parametrii $\vec{a}_{10}, \vec{\varepsilon}_{10}$ şi $\vec{\omega}_{10}$.

În baza rezultatelor obţinute în paragraful 8.1.3. rezultă:

Acceleraţia relativă a punctului A este acceleraţia lui faţă de triedrul mobil T_1, punctul fiind solidar cu triedrul T_2:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{21} + \vec{\varepsilon}_{21} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2\right). \qquad (9.27)$$

Acceleraţia de transport a punctului A este acceleraţia lui faţă de triedrul T_O, punctul fiind considerat solidar legat cu triedrul T_1:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{10} + \vec{\varepsilon}_{10} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_1\right). \qquad (9.28)$$

Acceleraţia Coriolis este egală cu dublul produsului vectorial dintre viteza unghiulară de transport şi viteza relativă (9.23):

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{10} \times \vec{v}_r = 2\vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2\right). \qquad (9.29)$$

Întroducând $\vec{a}_r, \vec{a}_t$ şi $\vec{a}_c$ în relaţia (9.21) rezultă:

$$\begin{aligned}\vec{a}_A = {} & \vec{a}_{10} + \vec{a}_{21} + \vec{\varepsilon}_{10} \times \vec{r}_1 + \vec{\varepsilon}_{21} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_1\right) + \\ & + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2\right) + 2\vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2\right).\end{aligned} \qquad (9.30)$$

Pentru generalizare se consideră triedrul fix T_O, triedrele intermediare $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ şi T_n ataşat rigidului în mişcare:

$$\begin{aligned}\vec{a}_A = {} & \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\varepsilon}_{i,i-1} \times \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_{i,i-1} \times \left(\vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{r}_i\right) + \\ & + 2\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_{j,j-1} \times \left(\vec{v}_{i,i-1} + \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{r}_i\right) \qquad \text{unde } j < i.\end{aligned} \qquad (9.31)$$

9.3. PROBLEME REZOLVATE

1. Un cursor M se deplasează pe generatoarea VA a unui con, după legea $S = 0{,}2t^2(\text{m})$. Conul având unghiul la vârf $2\alpha = 60^\circ$ se roteşte în jurul axei sale OV, după legea $\theta = 0{,}5t^2(\text{rad})$. Să se determine viteza

absolută şi acceleraţia absolută a cursorului la timpul t=2 secunde.

Rezolvare. Se aleg două sisteme de referinţă: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi unul mobil Oxyz ca în figura 9.3. Generatoarea conului VA este conţinută în planul mobil xOz. Mişcarea punctului M faţă de con este mişcare relativă, traiectoria mişcării relative este dreapta VA, generatoarea conului. Mişcarea punctului M considerat solidar cu conul, în mişcare faţă de sistemul fix, este mişcare de transport, traiectoria mişcării de transport este un cerc de rază R = S sinα. Mişcarea cursorului faţă de sistemul fix, este mişcare absolută, traiectoria mişcării absolute este o elicie conică.

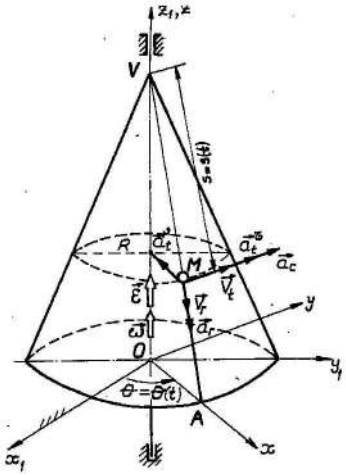


Fig. 9.3

Viteza absolută este:

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$, unde:

$v_r = \dot{S}_{t=2} = 0{,}8 m/s;\ \vec{v}_r = 0{,}4\vec{i} - 0{,}4\sqrt{3}\vec{k};$

$v_t = R \cdot \dot{\theta} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 m/s; \vec{v}_t = 0{,}8\vec{j};$

deci: $\vec{v}_a = 0{,}4\vec{i} + 0{,}8\vec{j} - 0{,}4\sqrt{3}\vec{k}; v_a = 1{,}13 m/s.$

Vectorii viteză relativă şi viteză de transport s-au reprezentat în figura 9.3.

Acceleraţia absolută este:

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c,$

unde $a_r = \ddot{S} = 0{,}4 m/s^2;\ \vec{a}_r = 0{,}2\vec{i} - 0{,}2\sqrt{3}\vec{k};$

$\vec{a}_t = \vec{a}_t^{\tau} + \vec{a}_t^{\nu}$ dar $a_t^{\tau} = R \cdot \ddot{\theta} = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4 m/s^2 \uparrow i$

$a_t^{\nu} = R \cdot \dot{\theta}^2 = 0{,}4 \cdot 2^2 = 1{,}6 m/s^2;$ deci $:\vec{a}_t = -1{,}6\vec{i} + 0{,}4\vec{j}.$

Acceleraţia Coriolis este:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & -0{,}4\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1{,}6\vec{j}.$$

Vectorii accelerație s-au reprezentat în figura 9.3.
Rezultă:

$$\vec{a}_a = -1,4\vec{i} + 2\vec{j} - 0,2\sqrt{3}\vec{k}; a_a = \sqrt{1,4^2 + 2^2 + 3 \cdot 0,2^2} = 2,46 m/s^2.$$

2. Roata panoramică 1 de rază R=12 m (fig. 9.4) se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω_{10}=0,2 rad/s în jurul axei orizontale ce trece prin O. Cabinele 2 şi 3 sunt articulate în A şi, respectiv, în B de janta roții 1 şi se rotesc în raport cu aceasta cu o viteză unghiulară constantă ω_{21}=0,2 rad/s. Să se determine vitezele absolute şi acceleraţiile absolute ale punctelor C şi D care se găsesc pe verticalele ce trec în mod corespunzător, prin punctele A şi B dacă AC=BD=2 m.

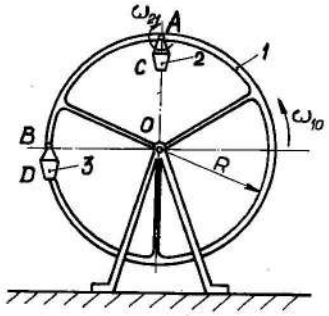


Fig. 9.4

Rezolvare. Cele două viteze unghiulare au suporturile paralele, mărimi egale şi sensuri contrare. Viteza absolută a cabinelor este:

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10} = 0,2\vec{i} - 0,2\vec{i} = 0.$$

Deci, cabinele de observaţie 2 şi 3 au mişcări de translaţie. Vitezele tuturor punctelor, sunt egale:

$$v_C = v_D = \omega_{10} \cdot \left|\vec{OA}\right| = \omega_{10} \cdot R = 12 \cdot 0,2 = 2,4 m/s. .$$

Acceleraţiile punctelor A şi B au numai componente normale şi sunt egale:

$$a_C = a_D = \omega_{10}^2 \cdot R = 0,2^2 \cdot 12 = 0,48 m/s^2.$$

3. Arborele 1 se roteşte în jurul unei axe verticale O_1O_2 cu viteza unghiulară constantă ω_{10}=2 rad/s (fig. 9.5). Pe acest arbore este fixat în O un alt ax orizontal, în jurul căruia se roteşte uniform discul 2 de rază R=0,15 m, cu viteza unghiulară $\omega_{21} = \omega_{10}$. Să se determine, vitezele absolute şi acceleraţiile absolute ale punctelor A şi B situate la periferia discului 2, precum şi acceleraţia unghiulară a discului.

Rezolvare. Cele două viteze unghiulare au axele concurente şi perpendiculare, în polul O. Se alege un sistem de referinţă Oxyz, cu originea în polul fix O. Expresiile analitice ale vitezelor unghiulare sunt:

$\vec{\omega}_{10} = 2\vec{k}$ şi $\vec{\omega}_{21} = 2\vec{i}$.

Viteza unghiulară rezultantă este:

$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

Vitezele punctelor A şi B conform relaţiei (10.42) sunt:

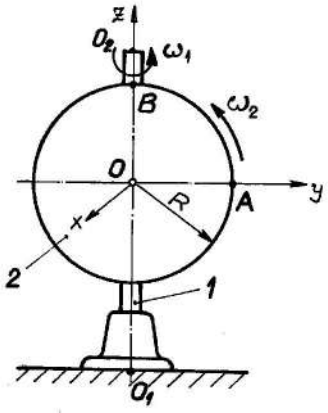


Fig. 9.5

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{20} \times OA = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0{,}15 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}3\vec{i} + 0{,}3\vec{k}; v_A = 0{,}424 \text{m/s}.$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{20} \times OB = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0{,}15 \end{vmatrix} = -0{,}3\vec{j}; v_B = 0{,}3 \text{m/s}.$$

Acceleraţiile punctelor A şi B rezultă din distribuţia de acceleraţii a rigidului în mişcare cu punct fix. Discul execută o mişcare de precesie regulată şi conform relaţiilor (9.87) şi (10.36) acceleraţia unghiulară a discului este:

$$\vec{\varepsilon}_{20} = \vec{\omega}_{10} \times \vec{\omega}_{21} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{j}.$$

Acceleraţiile punctelor A şi B conform relaţiei (9.84) sunt:

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon}_{20} \times OA + \vec{\omega}_{20} \times (\vec{\omega}_{20} \times OA) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -0,3 & 0 & 0,3 \end{vmatrix} = -1,2\vec{j}; a_A = 1,2 m/s^2;$$

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_{20} \times OB + \vec{\omega}_{20} \times (\vec{\omega}_{20} \times OB) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -0,3 & 0 \end{vmatrix} = 1,2\vec{i} - 0,6\vec{k}; a_B = \sqrt{1,2^2 + 0,6^2} = 1,342 m/s^2.$$

9.4. PROBLEME PROPUSE

1. Un disc de rază R = 0,06 m se roteşte în jurul articulaţiei O cu viteza unghiulară constantă ω = 1 rad/s (fig. 9.6). Pe suprafaţa discului este practicat un canal în interiorul căruia se deplasează bila M după legea AM = S (t) = 0,02 π t^2 [m]. Canalul este format din două semicercuri de raze r_1 = 0,02 m şi r_2 = 0,04 m, unghiul α = 60°, cu diametrul vertical OB. Să se determine viteza absolută şi acceleraţia absolută a punctului M la momentul de timp t_1 =1s.

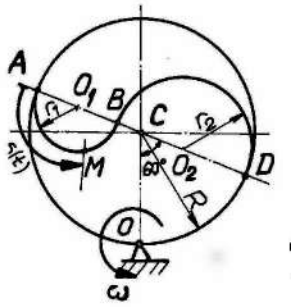


Fig. 9.6

R $v_M = 9,17 \cdot 10^{-2}$ m/s; $a_M = 21,44 \cdot 10^{-2}$ m/s².

2. Pe un plan orizontal se rostogoleşte fără alunecare discul 1 de rază R = 1 m. Centrul discului C, are acceleraţia a_C = 0,5 m/s² = const. La periferia discului, în A este articulat un manşon 2 în interiorul căruia alunecă bara 3 articulată în O. Să se calculeze viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a barei 3 la momentul t = 2 s de la începerea

mişcării când sistemul de corpuri se află în poziţia reprezentată în figura 9.7. La momentu iniţial, discul se află în repaus.

R. $\omega_3 = 0{,}5$ rad/s;
$\varepsilon_3 = 0$.

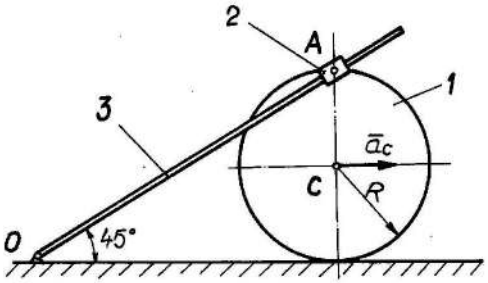


Fig. 9.7

3. Discul 1 de rază R = 0,4 m se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal şi cu ajutorul patinei 3 articulată în A pe circumferinţa de rază R a discului, pune în mişcare bara cotită 2. Bara cotită 2 se deplasează pe verticală. Viteza centrului discului este $v_C = 0{,}8$ m/s, constantă. Determinaţi viteza şi acceleraţia barei 2, precum şi acceleraţia relativă a punctului A pentru poziţia mecanismului din figura 9.8, când l = 0,6 m.

R. $v_2 = 0{,}69$ m/s; $a_2 = 1{,}38$ m/s^2; $a^x_{A_1A_2} = 0.8$ m/s^2.

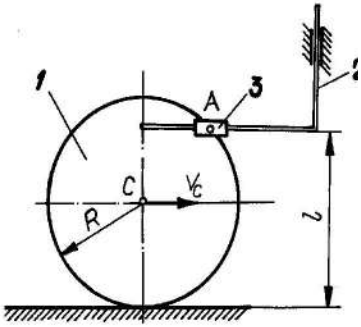


Fig. 9.8

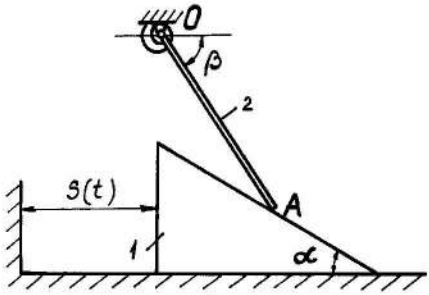


Fig. 9.9

4. Prisma din figura 9.9 se deplasează în linie dreaptă pe un plan după legea S (t) = 0,02 t (5 - t) m. Pe această prismă se sprijină capătul A al unei bare OA de lungime 0,2 m, articulată în O. Determinaţi viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a barei la tim-pul t = 1 s, dacă la acest moment $\beta = 60^o$ iar $\alpha = 30^o$.

R. $\omega = 0{,}17$ rad/s; $\varepsilon = 0{,}13$ rad/s^2.

5. Prisma 1 se mişcă în linie dreaptă pe un plan orizontal după legea S (t) = 0,12 (1 - cos pt /6) m. Pe suprafaţa interioară cilindrică de rază R = 0,12 m a prismei, se sprijină capătul A al unui tachet 2 (fig. 9.10), ce se poate deplasa pe verticală. Să se determine viteza absolută şi acceleraţia absolută a tachetului precum viteza şi acceleraţia relativă a prismei la timpul t = 2 secunde.

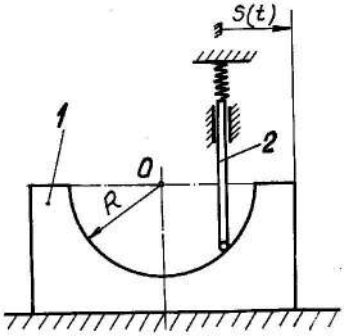


Fig. 9.10

R. $v = \pi \cdot 10^{-2}$ m/s; a = $29\ \pi^2 \cdot 10^{-4}$ m/s^2;
$v_r = 0{,}02\ \pi$ m/s; $a_r = 33\ \pi^2 \cdot 10^{-4}$ m/s^2.

6. Roata de rază R = 2 m, din figura 9.11 se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal, centrul roţii având acceleraţia $a_C = 0{,}5$ m/s^2. în acelaşi timp pe raza CA se deplasează de la C spre A un punct M după legea CM = S (t) = 0,25 t^2 m. Calculaţi acceleraţia absolută a punctului M, când CM = R/2, iar raza este orizontală ca în figură. La momentul iniţial roata se află în repaus.

R. $a_M = 1{,}46$ m/s^2.

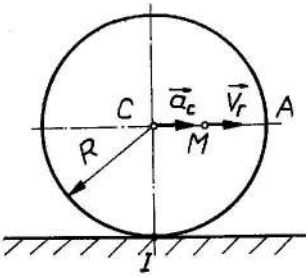


Fig. 9.11

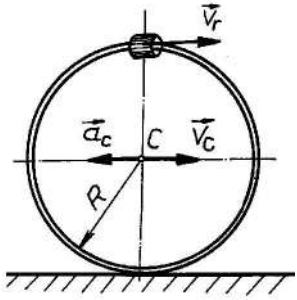


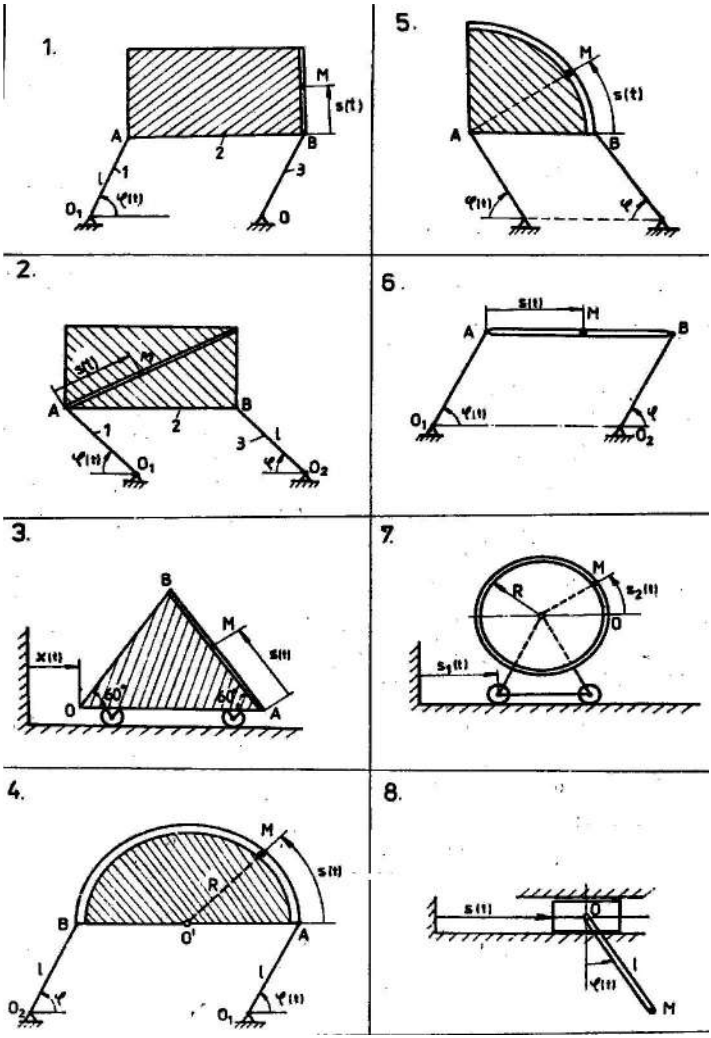
Fig. 9.12

7. Inelul M se deplasează cu viteza relativă $v_r = 2$ m/s pe cercul de rază R = 0,5 m, care se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal. Pentru poziţia din figura 9.12 să se calculeze viteza absolută şi acceleraţia absolută a inelului dacă $v_C = 4$ m/s şi $a_C = 1$ m/s^2, unde C este centrul cercului.

R. $v_M = 10$ m/s; $a_M = 72{,}03$ m/s^2.

8. Pentru problemele prezentate în tabelul 9.1, să se determine viteza absolută şi acceleraţia absolută a punctului M. Se cunosc legile de mişcare φ (t) şi S (t), date în tabelul 9.2.

Tabelul 9.1



Tabelul 9.2

Numărul problemei	Se dă:	Se cere:
1	$O_1A = O_2B = 0,2$ [m] $\varphi(t) = \frac{4\pi}{3} t^2$ [rad] $S(t) = 0,01\ t^3 + 0,5\ t$ [m]	v_a^M, viteza absolută a lui M; a_a^M, accelerația absolută a lui M; la momentul $t_1 = \frac{1}{2}$ sec.
2	$O_1A = O_2B = 0,3$ [m] $\varphi(t) = \frac{8\pi}{3} t^3$ [rad] $S(t) = 0,16\ t^2 - 0,02\ t + 0,02$ [rad]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = \frac{1}{2}$ sec.
3	$x(t) = -0,8\ t + 0,3\ t^2$ [m] $S(t) = 0,04\ t + 0,01\ t^2$ [m]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = 2$ sec.
4	$\varphi(t) = \frac{5\pi}{6} t^3$ [rad] $S(t) = 0,06\ \pi\ t^2$ [m] R = 0,18 [m] $O_1A = O_2B = 0,02$ [m]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = 1$ sec.
5	$O_1A = O_2B = 0,4$ [m] AB = R = 0,3 [m] $\varphi(t) = \frac{\pi}{8} t^2$ [rad] $S(t) = \frac{0,05\pi}{4}$ t3 [m]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = 2$ sec.
6	$O_1A = O_2B = 0,25$ [m] $\varphi(t) = \frac{4\pi}{27} t^2$ [rad] $S(t) = 2\ t^3$ [m]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = \frac{3}{2}$ sec.
7	R = 0,81 [m] $S_1(t) = 0,2\ (1 - \sin\frac{\pi}{2} t)$ [m] $S_2(t) = 0,03\ \pi\ t^2$ [m]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = 3$ sec.
8	OM = l = 0,20 [m] $S(t) = 0,18\ t^2 + 0,02\ t$ [m] $\varphi(t) = \frac{5\pi}{6} \sin\frac{\pi}{12} t$ [rad]	v_a^M , a_a^M la $t_1 = 2$ sec.

DINAMICA

10.

NOȚIUNI SPECIFICE ÎN DINAMICĂ

10.1. Generalități 259
10.2. Lucrul mecanic 260
10.2.1. Lucrul mecanic al forțelor ce acționează asupra punctului material 260
10.2.2. Lucrul mecanic al forțelor ce acționează asupra rigidului 265
10.3. Puterea mecanică 268
10.4. Randamentul mecanic 269

10.5. Momente de inerție mecanice 270
10.5.1. Momentele de inerție mecanice ale rigidului ... 271
10.5.2. Momentele de inerție ale corpurilor de rotație 275
10.5.3. Variația momentelor de inerție la translația axelor 277
10.5.4. Variația momentelor de inerție la rotația axelor 279
10.6. Energia mecanică 280
10.6.1. Energia cinetică 281
10.6.2. Energia potențială 285
10.7. Impulsul 286
10.8. Momentul cinetic 287
10.9. Torsorul vectorilor impuls pentru diferite corpuri în mişcare 290
10.10 Probleme rezolvate 296
10.11 Probleme propuse 307

DINAMICA

10

NOȚIUNI SPECIFICE ÎN DINAMICĂ

10.1. GENERALITĂȚI

Dinamica este partea Mecanicii care studiază mişcarea mecanică a sistemelor materiale luând în considerare atât cauzele mişcării (forţele care acţionează sistemul) cât şi proprietăţile inerţiale ale sistemului (masa şi distribuţia ei în spaţiu). Ţinând seama de elementele care se cunosc şi de cele care trebuie determinate, problemele de dinamică se încadrează în una din următoarele categorii:

a) probleme directe în care sunt date caracteristicile geometrice ale sistemului (formă şi dimensiuni), caracteristicile inerţiale (masă şi momente de inerţie), condiţiile iniţiale ale mişcării şi forţele care-l acţionează şi se cere să se determine mişcarea sistemului;

b) probleme inverse în care sunt cunoscute caracteristicile geometrice şi inerţiale, precum şi ecuaţiile de mişcare ale sistemului şi se cere determinarea forţelor care-l acţionează. În general, aceste probleme sunt nedeterminate deoarece există mai multe sisteme de forţe, care acţionând asupra aceluiaşi sistem, provoacă aceeaşi mişcare;

c) probleme mixte în care se cere determinarea unor caracteristici ale mişcării şi o parte din forţele care acţionează sistemul, cunoscând caracteristicile geometrice şi inerţiale, condiţiile iniţiale ale mişcării, unele elemente ale mişcării precum şi o parte din forţele care-l acţionează.

Rezolvarea acestor probleme se face cu ajutorul unor teoreme şi principii deduse prin aplicarea principiilor fundamentale ale Mecanicii.

Statica şi cinematica au operat cu noţiuni care se vor regăsi în cadrul dinamicii. În plus, această parte a cursului de Mecanică va introduce noţiuni specifice ca noţiunile de lucru mecanic, putere mecanică, randament mecanic, energie mecanică, moment de inerţie, impuls şi moment cinetic.

10.2. LUCRUL MECANIC

10.2.1. Lucrul mecanic al forţelor ce acţionează asupra punctului material

Noţiunea de lucru mecanic s-a introdus din necesitatea de a evalua acţiunea exercitată de o forţă asupra unui corp în decursul unei deplasări.

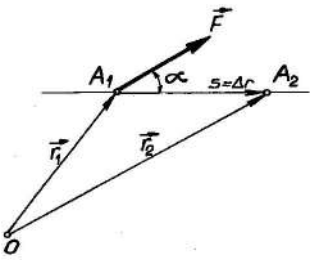


Fig. 10.1

În figura 10.1 se consideră un punct material A ce se deplasează pe o traiectorie rectilinie, între punctele A_1 şi A_2, sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$ constantă (în mărime direcţie şi sens) ce formează unghiul α cu această direcţie. Lucrul mecanic L al acestei forţe $\vec{F}$ se defineşte ca fiind egal cu produsul dintre proiecţia forţei pe direcţia deplasării şi deplasarea respectivă:

$$L = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}, \qquad (10.1)$$

în care $\Delta\vec{r}$ reprezintă variaţia vectorului de poziţie.

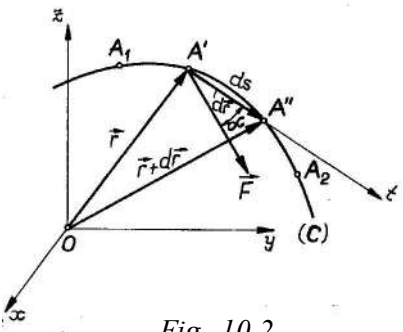


Fig. 10.2

Considerând cazul general al unei forţe variabile $\vec{F}$, (fig.10.2) al cărei punct de aplicaţie A descrie o traiectorie curbilinie (C) se va defini un lucru mecanic elementar dL pentru o deplasare elementară dS, într-un timp elementar dt, în care forţa poate fi considerată constantă, iar arcul dS se poate confunda cu coarda dr. Astfel rezultă:

$$dL = F(\cos\alpha) \cdot ds = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cos\alpha = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad (10.2)$$

unde $d\vec{r}$ reprezintă variaţia elementară a vectorului de poziţie.

Relațiile (10.1) și (10.2) arată că lucrul mecanic este o mărime scalară și se exprimă prin produsul scalar dintre forța $\vec{F}$ și variația vectorului de poziție. Lucrul mecanic poate fi pozitiv, negativ sau nul după cum unghiul dintre cei doi vectori este mai mic, mai mare sau egal cu 90° Lucrul mecanic pozitiv se mai numește lucru mecanic motor, iar cel negativ rezistent.

Unitatea de măsură pentru lucrul mecanic este joule-ul, în sistemul internațional SI.

Expresia analitică a lucrului mecanic elementar se obține considerând expresiile analitice ale vectorilor $\vec{F}$ și $d\vec{r}$ față de un sistem de referință fix cu originea în O:

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ și } d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Deci:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (10.3)$$

În funcție de viteza $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ a punctului de aplicație a forței, expresia lucrului mecanic elementar este:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})dt. \qquad (10.4)$$

Pentru o deplasare finită a punctului de aplicație al forței $\vec{F}$, din poziția A_1 în poziția A_2 (fig. 10.2) pe curba (C) se obține **lucrul mecanic finit** (total), ce se exprimă prin integrala:

$$L_{A_1A_2} = \int_{\overset{\frown}{A_1A_2}} \vec{F} \times d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{A_1A_2}} (Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (10.5)$$

Relația (10.5) arată că lucrul mecanic total al unei forțe, corespunzător unei deplasări finite, se exprimă printr-o integrală curbilinie, extinsă pe traiectoria descrisă de punctul de aplicație al forței și depinde atât de forță cât și de arcul de curbă pe care se deplasează punctul său de aplicație.

Pentru anumite **forțe** care se numesc **conservative**, lucrul mecanic finit nu depinde de forma și lungimea traiectoriei parcurse de punctul său de aplicație, ci numai de pozițiile acestor puncte. Proiecțiile acestor forțe conservative pe axele unui sisyem de referință sunt derivatele parțiale ale unei funcții scalare U (x, y, z) față de coordonatele x, y, z ale punctului

de aplicație al forței:

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \text{grad}U \qquad (10.6)$$

unde X, Y, Z-proiecțiile forței pe axele de coordonate sunt:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; Y = \frac{\partial U}{\partial y}; Z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (10.7)$$

Funcția U (x, y, z) se numeşte **funcție de forță** iar spațiul în care forțele sunt conservative se numeşte spațiu conservativ.

Lucrul mecanic elementar al forței $\vec{F}$ conservative devine:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU, \qquad (10.8)$$

adică lucrul mecanic elementar al unei forțe conservative este diferențiala totală exactă a funcției de forță U.

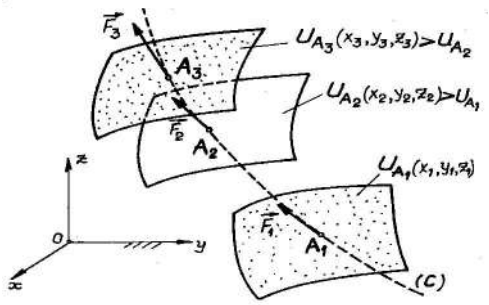


Fig. 10.3

Lucrul mecanic total al forței conservative $\vec{F}$ (fig.10.3) când punctul ei de aplicație se deplasează pe curba (C) din $A_1(x_1, y_1, z_1)$ în $A_2(x_2, y_2, z_2)$ devine:

$$L_{A_1A_2} = \int_{\overset{\frown}{A_1A_2}} \vec{F} \times d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} dU = U_{A_2} - U_{A_1}, \qquad (10.9)$$

în care $U_{A_2} = U(x_2, y_2, z_2)$ şi $U_{A_1} = U(x_1, y_1, z_1)$ sunt valorile funcției U când punctul material se află în A_2, respectiv în A_1. Deci, lucrul mecanic total al unei forțe conservative nu depinde de forma şi lungimea traiectoriei parcurse de punctul de aplicație al forței ci numai de pozițiile inițială şi finală ale punctului.

Uneori, în locul funcției U se poate considera funcția V denumită **funcție potențială** (energie potențială), definită prin relația:

$$V = -U. \qquad (10.10)$$

În acest caz, lucrul mecanic elementar are expresia:

$$dL = -dV. \qquad (10.11)$$

Funcţia de forţă U şi funcţia potenţială V nu pot fi determinate decât cu aproximaţia unei constante.

În natură se întâlnesc următoarele sisteme de forţe conservative: forţele gravi-taţionale $\vec{F} = m\vec{g}$, forţele elastice $\vec{F} = -k\vec{r}$ şi forţele de atracţie universală $\vec{F} = -f\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. De asemenea, toate forţele constante sunt forţe conservative.

Forţele de frecare şi în general forţele rezistente sunt forţe neconservative, deoarece aceste forţe depind şi de viteza punctului material (nu numai de vectorul de poziţie). Lucrul mecanic al acestor forţe este întotdeauna negativ.

Aplicaţie. Să se calculeze lucrul mecanic şi funcţia de forţă U pentru forţele gravitaţionale şi elastice.

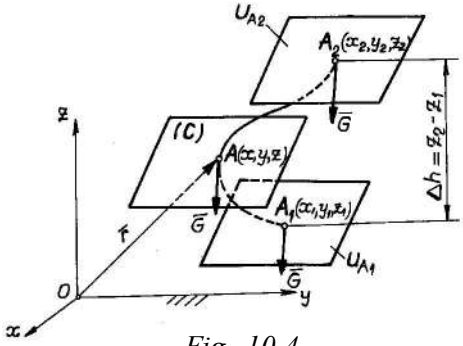


Fig. 10.4

Rezolvare. a) În figura 10.4 se consideră un punct A de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ ce se deplasează pe o traiectorie oarecare din $A_1(x_1, y_1, z_1)$ în $A_2(x_2, y_2, z_2)$ Proiecţiile pe cele trei axe ale acestei forţe sunt:

X=0; Y=0; Z=-mg.

Lucrul mecanic corespunzător deplasării punctului de aplicaţie din A_1 în A_2 este:

$$L_{A_1A_2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = -\int_{Z_1}^{Z_2} mgdz = -mg(Z_2 - Z_1) = \pm mg\Delta h. \qquad (10.12)$$

Deoarece $-mg = \frac{\partial U}{\partial z}$, rezultă că funcţia de forţă corespunzătoare greutăţii $\vec{G}$ este

$$U = -mgz + C \qquad (10.13)$$

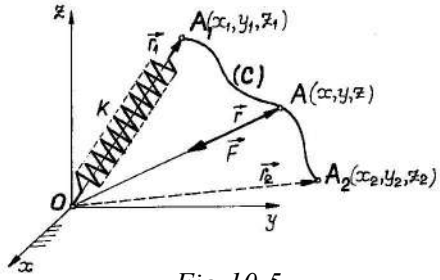


Fig.10.5

Rezultă că lucrul mecanic al greutății corpurilor este egal cu produsul dintre greutatea corpului şi diferența de nivel Δh Lucrul mecanic nu depinde de forma traiectoriei descrisă de punctul de aplicație al forței, ci numai de diferența de nivel Δh şi mărimea forței mg. Dacă $z_2 > z_1$, lucrul mecanic este negativ, iar dacă $z_2 < z_1$ lucrul mecanic este pozitiv.

b) Forțele elastice sunt forțe de reacțiune care apar ca urmare a deformării corpurilor elastice.Forțele sunt proporționale cu deplasarea punctului lor de aplicație măsurată din poziția de echilibru (poziția nedeformată a corpului). În fig.10.5 se consideră un resort cilindric de constantă elastică k. Un capăt este fixat în O iar celălalt descrie curba (C). Forța elastică $\vec{F}$ trece tot timpul prin punctul fix O.

Forța elastică $\vec{F}$ are expresia:

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \tag{10.14}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului A (x, y, z), capătul arcului ce descrie traiectoria (C).

Proiecțiile acestei forțe pe axele sistemului cartezian de referință sunt:

X=-k x; Y=-k y; Z=-k z.

Lucrul mecanic corespunzător deplasării capătului arcului A, din A_1 în A_2 este:

$$L = \int_{\overset{\frown}{A_1A_2}} \vec{F}d\vec{r} = -k\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{r}d\vec{r} = -k\frac{\left(\vec{r}_2^{\,2} - \vec{r}_1^{\,2}\right)}{2}. \tag{10.15}$$

În baza relației (10.8), funcția de forță U este:

$$U = \int dL = \int \vec{F}d\vec{r} + C = -\frac{k\,r^2}{2} + C,$$

sau $U = -\dfrac{k(x^2+y^2+z^2)}{2} + C.$ (10.16)

În cazul resortului cilindric din figura 10.6, la care deplasarea capătului

A este de-a lungul axei Ox, lucrul mecanic este:

$$L = \int_{A_1A_2} \vec{F}d\vec{r} = -\int_{f_1}^{f_2} kxdx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{f_1}^{f_2} = -\frac{k\left(f_2^2 - f_1^2\right)}{2},$$

unde f_1 şi f_2 sunt săgeţile arcului faţă de poziţia de potenţial nul (poziţia nedeformată a arcului).

Lucrul mecanic al forţei elastice este întotdeauna negativ, rezistent fie că arcul este întins, fie că este comprimat (unghiul α dintre $\vec{F}$ şi $d\vec{r}$ este 180^O).

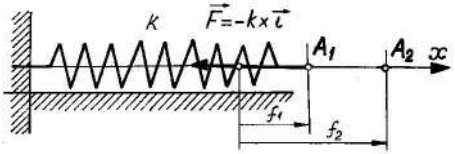


Fig. 10.6

Funcţia de forţă în cazul arcului din figura 10.6:

ştiind că: $-kx = -\frac{\partial U}{\partial x}$ rezultă

$$U = -\frac{kx^2}{2} + C.$$

10.2.2. Lucrul mecanic al forţelor ce acţionează asupra rigidului

Se consideră un corp solid rigid (fig.10.7) în mişcare generală sub acţiunea unui sistem de forţe $\vec{F}_i$ (i=1, 2..., n) aplicate în punctele A_i de vectori de poziţie $\vec{r}_i$ faţă de polul fix O_1, şi $\vec{\rho}_i$ faţă de polul mobil O.

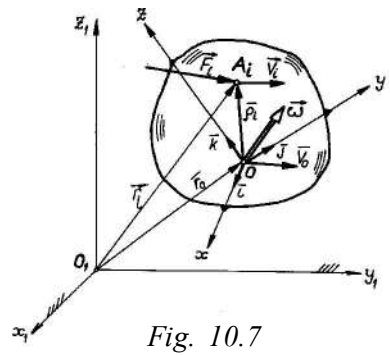


Fig. 10.7

Mişcarea generală a rigidului, faţă de sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$ este caracterizată de parametrii cinematici $\vec{\omega}$ şi $\vec{v}_O$.

Lucrul mecanic elementar al forţei $\vec{F}_i$ corespunzător unui interval de timp dt este:

$$dL_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt$$

ştiind că:

$\vec{v}_i = d\vec{r}_i / dt$ şi $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

rezultă:

$$dL_i = \vec{F}_i\left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i\right)dt = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_O \cdot dt + \vec{F}_i\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i\right)dt.$$

Lucrul mecanic elementar total, efectuat de toate forțele sistemului, va fi:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} dL_i = \left(\sum_{1}^{n} \vec{F}_i \right) \vec{v}_O \cdot dt + \sum_{1}^{n} \left(\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i \right) \cdot \vec{\omega} dt \qquad (10.17)$$

Dar $\sum_{1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R}$, este forța rezultantă a sistemului de forțe;

$\sum_{1}^{n} \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O$ -momentul rezultant al sistemului de forțe;

$\vec{v}_O \cdot dt = d\vec{r}_O$ -deplasarea elementară a vectorului de poziție $\vec{r}_O$;

$\vec{\omega} \cdot dt = d\vec{\theta}$ -deplasarea unghiulară elementară a rigidului.

Prin urmare, relația (10.17) devine:

$$dL = \vec{R} \cdot \vec{v}_O dt + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} dt = \vec{R} d\vec{r}_O + \vec{M}_O d\vec{\theta}. \qquad (10.18)$$

În cazul mişcărilor particulare ale rigidului, relația (10.18) capătă formele:

-în mişcarea de translație a rigidului $(\vec{\omega} = 0)$:

$$dL = \vec{R} \cdot \vec{v}_O dt = \vec{R} d\vec{r}_O. \qquad (10.19)$$

-în mişcarea de rotație cu axă fixă $(\vec{v}_O = 0)$:

$$dL = \vec{M}_O \vec{\omega} dt = \vec{M}_O d\vec{\theta} \text{ şi } L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M}_O d\vec{\theta} \qquad (10.20)$$

-în mişcarea plan-paralelă a rigidului $(\vec{\omega} \perp \vec{v}_O)$:

$$dL = \vec{R} d\vec{r}_O + \vec{M}_O d\vec{\theta} = dL_{tr} + dL_{rot} \qquad (10.21)$$

-în mişcarea elicoidală a rigidului $(\vec{\omega} \| \vec{v}_O)$:

$$dL = \vec{R} d\vec{r}_O + \vec{M}_O d\vec{\theta} = dL_{tr} + dL_{rot} \qquad (10.22)$$

Aplicație. Să se calculeze lucrul mecanic al forțelor şi momentul de frecare de rostogolire M_r, pentru un corp de revoluție de greutate $\vec{G}$, ce se rostogolește fără alunecare pe un plan înclinat aspru, de unghi α (fig.10.8).

Rezolvare. În punctul teoretic de contact I, care este şi centrul instantaneu de rotație apar următoarele forțe şi momente de legătură: $\vec{T}$,

forţa de aderenţă, $\vec{N}$ reacţiunea normală şi $\vec{M}_r$ momentul de frecare la rostogolire. Considerând că centrul C se deplasează pe distanţa l, lucrul mecanic al acestor forţe şi momente este:

$$L_T = \int \vec{T} d\vec{r} = \int_0^t \vec{T}\vec{v}_I dt = 0. \qquad (10.23)$$

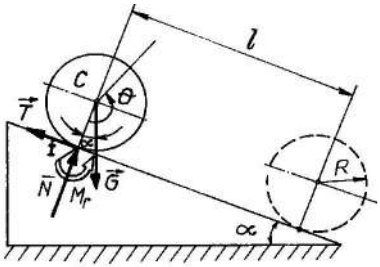


Fig.10.8

Deci, lucrul mecanic al forţei de aderenţă este nul, deoarece viteza punctului de aplicaţie este nulă.

Lucrul mecanic al reacţiunii normale $\vec{N}$, este nul deoarece reacţiunea este perpendiculară pe direcţia deplasării.

Lucrul mecanic al momentului de frecare de rostogolire M_r este:

$$L = \int \vec{M}_r d\vec{\theta} = -\int_0^\theta M_r d\theta = -s \cdot N \cdot \theta = -s \cdot G \cdot \frac{l}{R} \cdot \cos\alpha, \qquad (10.24)$$

în care N=G cosα, este reacţiunea normală; s-coeficientul de frecare la rostogolire; θ=l/R-unghiul de rostogolire corespunzător parcurgerii distanţei l.

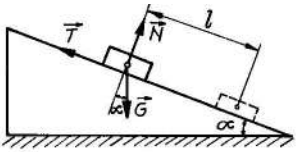


Fig. 10.9

Lucrul mecanic al greutăţii proprii $\vec{G}$ este:

$$L = G \cdot \Delta h = +G \cdot l \cdot \sin\alpha.$$

Observaţie. Pentru un corp, asimilat cu un punct material de greutate $\vec{G}$ care alunecă pe un plan înclinat aspru de unghi α (fig. 10.9), lucrul mecanic al forţei de frecare de alunecare $\vec{T}$, corespunzător unei deplasări l este:

$$L = \int \vec{T} d\vec{r} = -\int_o^l T dx = -\mu \cdot N \cdot l = -\mu \cdot G \cdot l \cdot \cos\alpha.$$

unde μ reprezintă coeficientul de frecare de alunecare dintre corp şi planul înclinat.

10.3. PUTEREA MECANICĂ

Puterea mecanică este mărimea scalară ce caracterizează energia transferată unui sistem fizic şi se defineşte ca fiind egală cu variaţia lucrului mecanic în unitatea de timp. Ea se exprimă prin derivata în raport cu timpul a lucrului mecanic produs:

$$P = \frac{dL}{dt} \tag{10.25}$$

Având în vedere relaţia (10.18) obţinem pentru putere forma:

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}, \tag{10.26}$$

corespunzătoare mişcării generale a rigidului.

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}_{O,} \tag{10.27}$$

pentru mişcarea de translaţie a rigidului.

Dacă rigidul are o mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe trecând prin punctul O, respectiv de rotaţie instantanee în jurul unei axe mobile trecând permanent prin punctul fix O pentru care $\vec{v}_O = 0$, puterea dezvoltată este:

$$P = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} = M_O \cdot \omega \cdot \cos\left(\vec{M}_O, \vec{\omega}\right). \tag{10.28}$$

Ca şi lucrul mecanic, puterea mecanică poate fi pozitivă, negativă sau nulă, după cum unghiul dintre cei doi vectori ai produsului scalar este mai mic, mai mare sau egal cu 90°. Unitatea de măsură pentru putere în sistemul internaţional (S.I.) este Watt-ul, 1W=1J/1s=1 Nm/s.

În practică se folosesc multiplii wattului şi o unitate mai veche "calul-putere". Se ştie că:

1CP=736W=0,736 kW sau 1kW=1,36CP.

În cazul când momentul M are aceeaşi orientare cu $\vec{\omega}$, dar se cunoaşte turaţia n, relaţia (10.28) devine:

$$P = \frac{\pi n M_O}{30}. \tag{10.29}$$

Uneori, în tehnică este necesar să se exprime cuplul la arborele unui motor în funcţie de puterea şi turaţia acestuia. În acest scop se utilizează

relaţiile:

$$M[N\cdot m]=\frac{30P[W]}{\pi n[rot/min]}=9550\frac{P[kW]}{n[rot/min]}=7029\frac{P[CP]}{n[rot/min]}. \tag{10.30}$$

Puterea mecanică are multe aplicaţii în tehnică, constituind o caracteristică de bază a tuturor agregatelor energetice, instalaţiilor de forţă.

10.4. RANDAMENTUL MECANIC

Randamentul mecanic al unei maşini sau instalaţii este o mărime adimensională, notată cu η şi dă o indicaţie asupra felului cum foloseşte maşina respectivă lucrul mecanic motor. Randamentul mecanic se defineşte ca fiind egal cu raportul dintre lucrul mecanic util efectuat în regim constant şi lucrul mecanic motor (constant).

Randamentul mecanic se poate exprima şi ca raport al puterilor utile şi consumate:

$$\eta=\frac{L_u}{L_c}=\frac{P_u}{P_c}<1. \tag{10.31}$$

Orice sistem mecanic care primeşte, consumă şi cedează energie poate fi reprezentat sub forma unei "cutii negre" (black box), ca în figura 10.10 în care intră un lucru mecanic motor $L_C(P_C)$, din care iese un lucru mecanic util $L_U(P_U)$ pe direcţia fluxului de energie şi din care deviază (se pierde) un lucru mecanic pasiv $L_P(P_P)$.

În această schematizare, randamentul sistemului este raportul mărimii de ieşire pe mărimea de intrare conform relaţiei (10.31) şi întotdeauna mai mic decât unitatea.

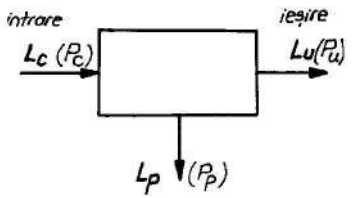


Fig. 10.10

Randamentul mecanic este mai mic decât unitatea deoarece funcţionarea oricărui sistem se face cu pierderi; în cazul sistemelor mecanice aceste pierderi se datoresc forţelor de frecare.

Uneori, randamentul mecanic se exprimă în funcție de **coeficientul de pierderi** φ, astfel:

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{L_c - L_p}{L_c} = 1 - \frac{L_p}{L_c} = 1 - \varphi, \qquad (10.32)$$

unde $\varphi = L_P / L_C$ iar L_P reprezintă lucrul mecanic pasiv, folosit pentru învingerea frecărilor.

Randamentul mecanic se calculează numai pentru regimul permanent (constant) iar în relația (10.32) s-a ținut seama că:

$$L_C = L_U + L_P.$$

Randamentul total al unui lanț de n maşini **legate în serie** este egal cu produsul randamentelor maşinilor lanțului.

$$\eta = \prod_{i=1}^{n} \eta_{i,} \qquad (10.33)$$

iar în cazul unui lanț de maşini **legate în paralel**, randamentul total este egal cu suma produselor dintre randamentele fiecărei maşini şi cota parte din puterea absorbită de maşină din totalul puterii motoare ce alimentează întregul lanț:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i, \qquad (10.34)$$

cu condiția ca: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$

10.5. MOMENTE DE INERȚIE MECANICE

Momentele de inerție mecanice sunt mărimi care caracterizează distribuția masei unui sistem material în raport cu un reper, ce poate fi pol, axă sau plan. În funcție de reperul considerat momentele de inerție se numesc polare, axiale, planare sau centrifugale când distribuția masei se raportează la două axe sau două plane perpendiculare.

Prin definiție, momentul de inerție mecanic al unui sistem material, în raport cu un pol, o axă sau un plan, este egal cu suma produselor maselor particulelor (finite sau elementare) sistemului şi pătratului

distanțelor acestor particule până la reperul considerat.

Astfel, expresiile de forma:

$$J = \sum_{1}^{n} m_i \delta_i^2 \geq 0, \left[kg \cdot m^2\right] \tag{10.35}$$

pentru sisteme discrete de puncte materiale şi

$$J = \int_{(S)} \delta^2 dm \geq 0, \left[kg \cdot m^2\right], \tag{10.36}$$

pentru medii materiale continue, se numesc momente de inerție mecanice planare, axiale sau polare după cum δ_i, respectiv δ reprezintă distanțele particulelor materiale (m, respectiv dm) ce alcătuiesc sistemul, la planul, axa sau polul considerat.

Momentele de inerție centrifugale, se definesc ca fiind egale cu suma produselor maselor particulelor şi distanțele lor la două axe sau plane perpendiculare. Aceste momente de inerție centrifugale se exprimă astfel:

$$J_{P_1P_2} = \sum_{1}^{n} m_i \delta_{i_1} \delta_{i_2} \text{ şi } J_{P_1P_2} = \int_{(s)} \delta_1 \delta_2 dm, \tag{10.37}$$

unde $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}$ reprezintă distanțele particulelor m_i până la două plane P_1 şi P_2, iar δ_1, δ_2 -distanțele particulelor materiale dm, până la cele două plane considerate.

Momentele de inerție mecanice se mai numesc momente masice de ordinul doi, deoarece distanțele care intervin în expresiile lor sunt la pătrat. Momentul de inerție mecanic este deci o mărime având dimensiunea $[J] = ML^2$ iar unitatea de măsură în SI, $kg \cdot m^2$.

10.5.1. Momentele de inerție mecanice ale rigidului

Momentele de inerție mecanice pentru solidul rigid sunt definite prin integralele de forma (10.36) şi (10.37). Pentru un corp de formă oarecare (fig.10.11), de masă M, raportat la un sistem de referință cartezian, se pot defini următoarele momente de inerție mecanice:

-momente de inerție planare, față de planele de coordonate:

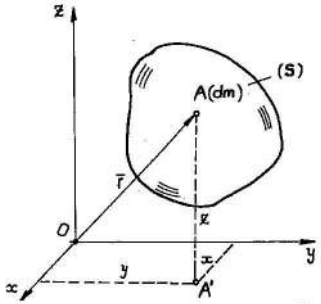


Fig. 10.11

$$J_{xOy} = \int_{(S)} z^2 dm;$$
$$J_{yOz} = \int_{(S)} x^2 dm; \qquad (10.38)$$
$$J_{xOz} = \int_{(s)} y^2 dm.$$

-momente de inerţie axiale, faţă de axele de coordonate:

$$J_x = \int_{(S)} \left(y^2 + z^2\right) dm;$$
$$J_y = \int_{(S)} \left(x^2 + z^2\right) dm; \qquad (10.39)$$
$$J_x = \int_{(s)} \left(x^2 + y^2\right) dm.$$

-momente de inerţie polar, faţă de originea O:

$$J_O = \int_{(S)} r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm. \qquad (10.40)$$

-momente de inerţie centrifugale (produse de inerţie), faţă de planele de coordonate:

$$J_{xy} = \int_{(S)} xydm; J_{yz} = \int_{(S)} yzdm; J_{xz} = \int_{(S)} xzdm. \qquad (10.41)$$

În cazul sistemelor discrete de puncte materiale, integralele din formulele (10.38)...(10.41), se înlocuiesc cu sume.

Proprietăţi:

a) Momentele de inerţie planare, axiale sau polare sunt mărimi scalare pozitive. Ele devin nule numai atunci când sistemul material este conţinut în planul, pe axa sau în polul considerat.

b) Momentele de inerţie centrifugale sunt mărimi scalare pozitive, negative sau nule în funcţie de sistemul de referinţă ales. Momentele de inerţie centrifugale sunt nule când una din axe sau ambele sunt axe de

simetrie, sau când unul din cele două plane față de care se calculează, este plan de simetrie.

c) Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție planare.

Cunoscând relația $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ şi definiția momentelor de inerție axiale, planare şi polare, rezultă următoarea expresie, înmulțind cu elementul de masă dm şi integrând pe tot domeniul (S) ocupat de corpul respectiv:

$$\int_{(S)} r^2 dm = \int_{(S)} x^2 dm + \int_{(S)} y^2 dm + \int_{(S)} z^2 dm,$$

sau $J_O = J_{yOz} + J_{xOz} + J_{xOy}$. (10.42)

d) Momentul de inerție polar se poate obține însumând la momentul de inerție planar, momentul de inerție față de axa perpendiculară pe acel plan.

Grupând termenii în relația $r^2 = x^2 + (y^2 + z^2)$, înmulțind cu elementul de masă dm şi integrând pe tot domeniul (S) rezultă:

$$\int_{(s)} r^2 dm = \int_{(S)} x^2 dm + \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm,$$

sau $J_O = J_{yOz} + J_x, J_O = J_{xOy} + J_z, J_O = J_{xOz} + J_y,$ (10.43)

relații obținute în mod asemănător.

e) Momentul de inerție polar este egal cu semisuma momentelor de inerție axiale.

Relația $2\vec{r}^2 = (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (x^2 + z^2)$ se înmulțeşte cu elementul de masă dm şi se integrează pe tot domeniul (S) rezultând:

$$2\int_{(S)} \vec{r}^2 dm = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm + \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm,$$

sau $J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z)$, (10.44)

În cazul când masa este distribuită într-un plan (cazul plăcilor), momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale:

$$J_O = J_x + J_y.$$ (10.45)

f) Momentul de inerţie axial este egal cu suma momentelor de inerţie faţă de planele rectangulare ce definesc axa respectivă.

O altă relaţie ce poate fi scrisă între coordonatele x şi y ale elementului de masă dm este $(x^2+y^2)=(x^2)+(y^2)$. Înmulţind cu elementul dm şi integrând pe tot domeniul (S) rezultă:

$$\int_{(S)}(x^2+y^2)dm=\int_{(S)}x^2dm+\int_{(S)}y^2dm,$$

sau $J_z=J_{yOz}+J_{xOz};J_y=J_{xOy}+J_{zOy};J_x=J_{xOz}+J_{xOy};$ (10.46)

g) Uneori se obişnuieşte a se exprima momentul de inerţie mecanic în funcţie de raza de inerţie a sistemului material în raport cu reperul considerat. Raza de inerţie, notată cu i este distanţa la care se poate considera concentrată întreaga masă M a sistemului material, pentru a obţine acelaşi moment de inerţie mecanic faţă de reperul ales; deci

$J=M\cdot i^2$, de unde: $i=\sqrt{\frac{J}{M}}$. (10.47)

h) Momente de inerţie geometrice. După forma lor geometrică, corpurile se clasifică în: linii materiale (bare), suprafeţe materiale (plăci), şi volume materiale (blocuri). Considerând aceste corpuri omogene, densitatea ρ este constantă în toată masa corpului respectiv. În cazul liniilor materiale se defineşte o densitate liniară ρ_L, suprafeţelor materiale o densitate superficială ρ_A, iar în cazul volumelor materiale o densitate volumică ρ.

Relaţiile (10.36) şi (10.37) pot fi scrise sub forma:

-pentru linii materiale omogene (bare):

$$J=\int_{(L)}\delta^2\rho_L dl=\int_{(L)}\delta^2\frac{M}{L}dl=\frac{M}{L}\int_{(L)}\delta^2dl=\frac{M}{L}\cdot I_L;$$ (10.48)

$$J_{P_1P_2}=\int_{(L)}\delta_1\delta_2\rho_L dl=\frac{M}{L}\int_{(L)}\delta_1\delta_2 dl=\frac{M}{L}\cdot I_{P_1P_2}.$$ (10.49)

-pentru suprafeţe materiale omogene (plăci):

$$J=\int_{(A)}\delta^2\rho_A dA=\frac{M}{A}\int_{(A)}\delta^2dA=\frac{M}{A}\cdot I_A;$$ (10.50)

$$J_{P_1P_2} = \frac{M}{A}\int_{(A)}\delta_1\delta_2 dA = \frac{M}{A}\cdot I_{P_1P_2}. \tag{10.51}$$

-pentru volume materiale omogene (blocuri):

$$J = \int_{(V)}\delta^2\rho_A dV = \frac{M}{V}\int_{(V)}\delta^2 dV = \frac{M}{V}\cdot I_V; \tag{10.52}$$

$$J_{P_1P_2} = \frac{M}{V}\int_{(V)}\delta_1\delta_2 dV = \frac{M}{V}\cdot I_{P_1P_2}. \tag{10.53}$$

Relațiile (10.48)...(10.53) exprimă legătura între momentele de inerție mecanice şi cele geometrice. În aceste relații, integralele I_L, I_A, I_V şi $I_{P_1P_2}$ se numesc momente de inerție geometrice pentru linii, suprafețe şi volume materiale, deoarece depind numai de caracteristicile geometrice ale corpului respectiv.

Relațiile (10.42)...(10.46) între momentele de inerție mecanice sunt valabile şi pentru momentele de inerție geometrice.

Observație. În aplicații, atunci când se calculează momentul de inerție mecanic al unui corp omogen, i se calculează acestuia momentul de inerție geometric în raport cu reperul fixat şi acesta se multiplică apoi cu densitatea corpului ρ_1, ρ_A sau ρ_V. Astfel, pentru sistemele continue şi omogene se poate stabili o relație de legătură, general valabilă, între momentele de inerție mecanice şi cele geometrice:

$$J = \rho \cdot I. \tag{10.54}$$

unde ρ este densitatea volumică, superficială sau liniară a corpului considerat, iar I-momentul de inerție geometric.

10.5.2. Momentele de inerție ale corpurilor de rotație

Un volum de rotație rezultă prin rotația unei suprafețe în jurul unei axe. În figura 10.12,a se consideră un corp de rotație rezultat prin rotația în jurul axei Ox a suprafeței limitate de curba de ecuație y = f (x) şi verticalele ce trec prin punctele A şi B de abscise x_A, respectiv x_B.

Momentul de inerţie axial J_x, în raport cu axa de rotaţie, a corpului omogen de masă M şi volum V, se obţine astfel: se detaşează la distanţa x faţa de planul yOz, o "felie" asimilabilă cu un cilindru de rază y şi înălţime elementară dx. În acest cilindru se detaşează elementul de volum dV, cu ajutorul coordonatelor polare ρ şi θ (fig. 10.12,b) volu-mul elementar dV, aproximat cu un paralelipiped, este:

$$dV = dAdx = \rho d\theta d\rho dx.$$

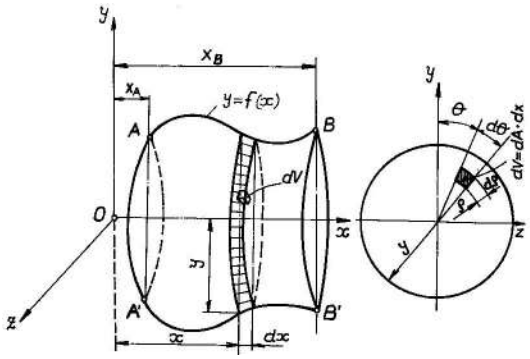


Fig. 10.12

Distanţa de la elementul de volum dV la axa Ox este ρ, iar momentul de inerţie axial J_x rezultă aplicând relaţia (10.52):

$$J_x = \frac{M}{V}\int_{(V)}\delta^2 dV = \frac{M}{V}\iiint \rho^2\cdot\rho d\theta d\rho dx = \frac{M}{V}\int_{x_A}^{x_B} dx\int_0^y \rho^3 d\rho\int_0^{2\pi} d\theta.$$

Rezultă:

$$J_x = \frac{M}{V}\frac{\pi}{2}\int_{x_A}^{x_B} f^4(x)dx. \qquad (10.55)$$

a)

Momentele de inerţie planar J_{yOz}, se determină tot cu relaţia (10.53), ştiind că distanţa de la elementul dV pe planul yOz este x:

$$J_{zOy} = \frac{M}{V}\int_{(V)}\delta^2 dV = \frac{M}{V}\iiint x^2\cdot\rho d\theta d\rho dx = \frac{M}{V}\int_{x_A}^{x_B} x^2 dx\int_0^y \rho d\rho\int_0^{2\pi} d\theta.$$

rezultă:

$$J_{zOy} = \frac{M}{V}\pi\int_{x_A}^{x_B} x^2 f^2(x)dx. \qquad (10.56)$$

Cunoscând relaţiile (10.42)...(10.46) între momentele de inerţie mecanice şi egalităţile $J_y = J_z, J_{xOz} = J_{xOy}$, rezultă celelalte momente

mecanice de inerție:

$$J_y = J_z = \frac{1}{2}J_x + J_{yOz}, J_{xOy} = J_{xOz} = \frac{1}{2}J_x, J_O = J_x + J_{yOz}. \quad (10.57)$$

10.5.3. Variația momentelor de inerție la translația axelor

În figura 10.13 se consideră un corp solid rigid de formă oarecare şi două sisteme de referință carteziene cu axele paralele între ele. Se presupun cunoscute momentele masice de ordinul întâi (momentele statice) şi momentele masice de ordinul al doilea (momentele de inerție mecanice), în raport cu sistemul Oxyz. Se pune problema determinării momentelor de inerție în raport cu sistemul $O_1x_1y_1z_1$, translatat față de sistemul Oxyz.

Punctul A, oarecare al rigidului sediul unei mase elementare dm, are în sistemul Oxyz coordonatele (x, y, z), iar sistemul $O_1x_1y_1z_1$, paralel cu primul, are coordonatele (x_1, y_1, z_1), Cunoscând coordo-natele (a, b, c) ale originii O, în sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$, între coordonatele punctului A se pot scrie următoarele relații:

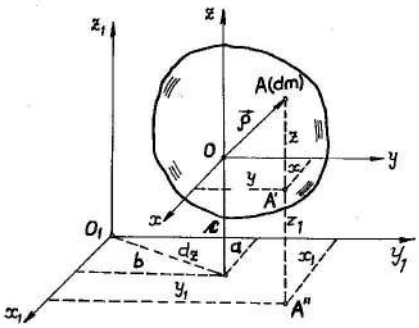


Fig. 10.13

$$\begin{aligned} x_1 &= x + a; \\ y_1 &= y + b; \\ z_1 &= z + c. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Este suficient să găsim o relație pentru calculul momentului de inerție față de una din axele sistemului $O_1x_1y_1z_1$ -de exemplu axa O_1z_1; pentru celelalte, formulele vor fi analoage.

Deci, momentul de inerție față de axa O_1z_1 este:

$$J_{z_1} = \int_{(S)} \delta^2 dm = \int_{(S)} (x_1^2 + y_1^2) dm = \int_{(S)} \left[(x+a)^2 + (x+b)^2\right] dm =$$

$$= \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + 2a \int_{(S)} x dm + 2b \int_{(S)} y dm + (a^2 + b^2) \int_{(S)} dm.$$

Având în vedere că $\int dm = M$ este masa corpului, iar $\int_{(S)} xdm = S_{yOz}$, $\int_{(S)} ydm = S_{xOz}$ sunt momentele statice planare rezultă:

$$J_{z_1} = J_z + 2aS_{yOz} + 2bS_{xOz} + Md_z^2, \tag{10.59}$$

unde s-a notat prin $d_z^2 = \left(a^2 + b^2\right)$ distanța dintre axele Oz şi O_1z_1.

Dacă originea O coincide cu C, centrul de masă al rigidului, momentele statice planare sunt nule, iar relația (10.59) se restrânge obținându-se **teorema lui Steiner**, sub forma:

$$J_{z_1} = J_{cz} + Md_z^2. \tag{10.60}$$

Deci, momentul de inerție axial, în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerție în raport cu o axă paralelă care trece prin centrul de masă, însumat cu produsul dintre masa totală a rigidului şi pătratul distanței dintre cele două axe.

Teorema lui Steiner (10.60) se extinde şi la celelalte momente de inerție, obținându-se în mod analog relațiile:

$$J_{x_1} = J_{cx} + Md_x^2;\ \ J_{y_1} = J_{cy} + Md_y^2;$$

-pentru momentele de inerție planare:

$$\begin{aligned} J_{x_1O_1y_1} &= J_{xcy} + M \cdot c^2; \\ J_{y_1O_1z_1} &= J_{ycz} + M \cdot a^2; \\ J_{x_1O_1z_1} &= J_{xcz} + M \cdot b^2; \end{aligned} \tag{10.61}$$

-pentru momentele de inerție polare:

$$J_{O_1} = J_c + M \cdot O_1C^2, \tag{10.62}$$

-pentru momentele de inerție centrifugale:

$$\begin{aligned} J_{x_1y_1} &= J_{xy} + M \cdot ab; \\ J_{y_1z_1} &= J_{yz} + M \cdot bc; \\ J_{x_1z_1} &= J_{xz} + M \cdot ac. \end{aligned} \tag{10.63}$$

Din teorema lui Steiner, exprimată prin relaţiile de forma (10.60) decurg următoarele **proprietăţi ale momentelor de inerţie** faţă de axe paralele:

a) momentul de inerţie este minim faţă de o axă care trece prin centrul de masă al sistemului material;

b) locul geometric al axelor paralele faţă de care momentele de inerţie sunt egale este un cilindru circular a cărui axă de simetrie trece prin centrul de masă al sistemului şi este paralelă cu direcţia dată.

10.5.4. Variaţia momentelor de inerţie la rotaţia axelor

În figura 10.14 se consideră un corp solid rigid şi un sistem de referinţă Oxyz, faţă de care se presupun cunoscute momentele de inerţie axiale J_x, J_y şi J_z şi cele centrifugale J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} Se cere să se determine momentul de inerţie axial J_Δ faţă de o axă oarecare (Δ) de versor variabil $\vec{e}$, axă care trece prin O şi are cosinusurile directoare α, β, γ.

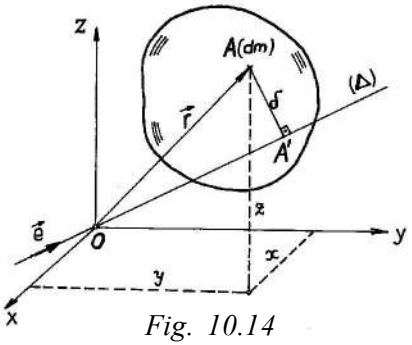


Fig. 10.14

Problema se tratează în raport cu o axă oarecare (Δ), deoarece se poate uşor particulariza pentru oricare altă axă a unui triedru rotit în spaţiu faţă de Oxyz.

O particulă A de masă elementară dm, este determinată de vectorul de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, şi este situată la distanţa δ faţă de axa (Δ).

Momentul de inerţie al rigidului faţă de axa (Δ) este:

$$J_\Delta = \int_{(S)} \delta^2 dm, \text{ unde:}$$

$$\delta^2 = \vec{r}^2 - (OA')^2 = \vec{r}^2 - (\vec{r}\cdot\vec{e})^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

Înmulţind primul termen cu relaţia cunoscută $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ şi

grupând termenii, obținem:

$$\delta^2 = (x^2+y^2+z^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 =$$
$$= (\alpha^2 x^2 + \alpha^2(y^2+z^2) + \beta^2 y^2 + \beta^2(x^2+z^2) + \gamma^2 z^2 + \gamma^2(x^2+y^2) -$$
$$- \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz =$$
$$= \alpha^2(y^2+z^2) + \beta^2(x^2+z^2) + \gamma^2(x^2+y^2) -$$
$$- 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz.$$

Având în vedere expresiile (10.40) şi (10.42) se obține relația:

$$J_\Delta = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\beta\gamma J_{yz}. \qquad (10.64)$$

Relația (10.64) exprimă momentul de inerție al sistemului material, în raport cu axa (Δ) şi în acelaşi timp reprezintă legea de variație a momentelor de inerție mecanice față de toate axele ce trec prin O. Relația (10.66) este o funcție de cosinusurile directoare α, β, γ care determină poziția axei respective.

În cazul particular al plăcilor plane, de exemplu situate în planul Oxy, $\gamma = 90^\circ$, $\cos\gamma = 0$, iar relația (10.64) devine:

$$J_\Delta = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y - 2\alpha\beta J_{xy}; \qquad (10.65)$$

Dacă se înlocuieşte $\beta = 90^\circ - \alpha$ atunci cosβ=sinα iar relația (10.65) ia forma particulară:

$$J_\Delta = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - 2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (10.66)$$

10.6. ENERGIA MECANICĂ

Energia mecanică poate fi energie cinetică sau energie potențială. Energia cinetică este o energie de mişcare iar energia potențială o energie de poziție. Suma dintre energia cinetică notată cu E (E_C) şi energia potențială notată cu V (E_P), reprezintă **energia mecanică totală** a punctului sau a corpului respectiv:

$$E + V = E_m. \qquad (10.67)$$

10.6.1. Energia cinetică

Pentru un punct material de masă m şi viteză $\vec{v}$, prin definiție energia cinetică este:

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2. \tag{10.68}$$

Energia cinetică este o mărime scalară strict pozitivă, care caracterizează starea de mişcare a punctului material la un moment dat. Energia cinetică este o mărime de stare care măsoară capacitatea mişcării mecanice de a se transforma în altă formă de mişcare (energie).

Unitatea de măsură a energiei cinetice în S.I. este Joule-ul.

Pentru un sistem de puncte materiale, energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale punctelor care alcătuiesc sistemul:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2. \tag{10.69}$$

În cazul solidului rigid energia cinetică se exprimă în funcție de mişcarea acestuia. În continuare, se va considera cazul când rigidul are o mişcare generală, ținându-se seama de distribuția de viteze în această mişcare, după care se va particulariza relația pentru diferite mişcări simple.

Solidul rigid fiind un continuu material rigid, pentru calculul energiei cinetice se va putea utiliza relația (10.69) în care semnul sumă se înlocuieşte cu semnul integrală:

$$E = \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{v}^2 dm. \tag{10.70}$$

Integrala acestei expresii se extinde pe tot domeniul (S) în care este repartizată masa solidului rigid.

În figura 10.15 se consideră un corp solid rigid în mişcare generală. Mişcarea generală este caracterizată de parametrii cinetici $\vec{\omega}$ şi $\vec{v}_O$. Un punct A, oarecare al rigidului de masă elementară dm va avea viteza $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

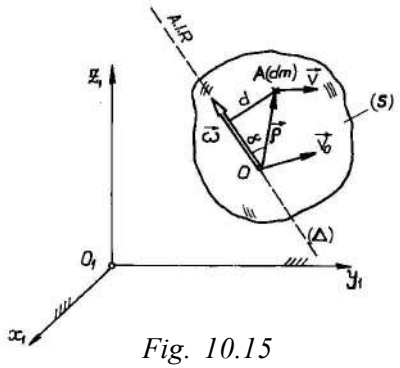


Fig. 10.15

Înlocuind expresia acestei viteze în relația (10.70) și ridicând la pătrat rezultă:

$$E=\frac{1}{2}\int_{(S)}(\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{\rho})^2\,dm=\frac{1}{2}\int_{(S)}v_O^2\,dm+$$

$$+\int_{(S)}\vec{v}_O(\vec{\omega}\times\vec{\rho})dm+\int_{(S)}\frac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{\rho})^2\,dm;$$

Integralele se extind pe tot domeniul (S), în care este repartizată masa rigidului. Viteza $\vec{v}_O$ și viteza unghiulară $\vec{\omega}$ sunt mărimi instantanee, care față de integrală se pot considera valori constante și scoase în fața integralei.

Deci,

$$E=\frac{1}{2}v_O^2\left(\int_{(S)}dm\right)+\vec{v}_O\left(\vec{\omega}\times\int_{(S)}\vec{\rho}\,dm\right)+\frac{1}{2}\omega^2\int_{(S)}(\rho\sin\alpha\vec{n})^2\,dm.$$

În această relație se regăsesc următoarele momente masice:

$\int_{(S)}dm=M$, masa întregului corp;

$\int_{(S)}\vec{\rho}\,dm=\vec{S}_O$, momentul static polar al rigidului în raport cu O;

$\int_{(S)}(\rho\sin\alpha\vec{n})^2\,dm=\int_{(S)}d^2dm=J_\Delta$, momentul de inerție mecanic al rigidului în raport cu axa instantanee (Δ) ce trece prin polul O.

Cu aceste notații, energia cinetică a rigidului în mișcare generală este:

$$E=\frac{1}{2}M\vec{v}_O^2+\vec{v}_O(\vec{\omega}\times\vec{S}_O)+\frac{1}{2}J_\Delta\vec{\omega}^2. \qquad (10.71)$$

Relația (10.71) arată că energia cinetică a rigidului în mișcare generală depinde de parametrii cinetici $\vec{\omega}$ și $\vec{v}_O$ precum și de punctul de referință O prin intermediul momentului static polar $\vec{S}_O$.

Dacă mişcarea se raportează la centrul de masă C, deci $O \equiv C$, momentul static în raport cu centrul de masă este nul, $S_C = 0$, iar expresia energiei cinetice (10.71) va avea o formă simplificată:

$$E = \frac{1}{2} M \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta C} \vec{\omega}^2. \qquad (10.72)$$

Relaţia (10.72) exprimă **teorema lui König**: "energia cinetică a rigidului în mişcare generală este egală cu suma dintre energia cinetică a centrului său de masă, unde se consideră concentrată întreaga masă şi energia cinetică de rotaţie în jurul centrului său de masă."

În cazul mişcărilor particulare ale rigidului, energia cinetică se calculează conform relaţiei (10.72) după cum urmează:

a) Rigid în mişcare de translaţie. Ştiind că în mişcarea de translaţie $\vec{\omega} = 0$ şi că vitezele instantanee ale tuturor punctelor rigidului sunt egale, expresia energiei cinetice este:

$$E = \frac{1}{2} M \vec{v}_C^2. \qquad (10.73)$$

Energia cinetică a rigidului în mişcare de translaţie este identică cu cea a unui punct ce ar coincide cu centrul de masă al rigidului, având masa M.

b) Rigid în mişcare de rotaţie cu axă fixă. Fie $\vec{\omega}$ viteza unghiulară de rotaţie a rigidului în jurul axei fixe (D) şi J_Δ momentul de inerţie mecanic în raport cu aceeaşi axă $(\vec{v}_O = 0)$. Energia cinetică are expresia:

$$E = \frac{1}{2} J_\Delta \vec{\omega}^2. \qquad (10.74)$$

c) Rigid în mişcare elicoidală. Deoarece $\vec{v}_O \| \vec{\omega}$ produsul mixt $\vec{v}_O \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_O \right) = 0$ din relaţia (10.75) se anulează, iar energia cinetică devine:

$$E = \frac{1}{2} M \vec{v}_O^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \vec{\omega}^2, \qquad (10.75)$$

adică, energia cinetică este suma dintre energia de translaţie de-a lungul axei mişcării elicoidale şi energia de rotaţie în jurul acesteia.

d) Rigid în mişcare plan-paralelă. Considerând centrul de masă pe axa Oz a rigidului rezultă $\vec{v}_O = \vec{v}_C$, iar produsul mixt $\vec{v}_C \left(\vec{\omega} \times \vec{S}_C \right) = 0$. Expresia energiei cinetice (10.75) devine:

$$E = \frac{1}{2} M \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta C} \vec{\omega}^2. \qquad (10.76)$$

unde $J_{\Delta C}$ reprezintă momentul de inerţie faţă de axa normală în planul director, trecând prin centrul de masă (în cazul de faţă $J_{\Delta C} = J_{Oz}$).

Relaţia (10.80) exprimă faptul că energia cinetică a unui corp în mişcare plan-paralelă este suma dintre energia cinetică de translaţie cu viteza centrului său de masă şi energia de rotaţie corespunzătoare rotaţiei instantanee în jurul unei axe (Δ), ce trece prin centrul de masă şi este perpendiculară pe planul în care are loc translaţia.

Datorită faptului că distribuţia de viteze în mişcarea plan-paralelă este analoagă cu cea din mişcarea de rotaţie, dacă se determină centrul instantaneu de rotaţie I, energia cinetică se poate calcula cu formula (10.78), specifică mişcării de rotaţie:

$$E = \frac{1}{2} J_{\Delta I} \vec{\omega}^2, \qquad (10.77)$$

în care $J_{\Delta I}$ reprezintă momentul de inerţie faţă de axa instantanee de rotaţie.

e) Rigid în mişcare cu punct fix. Alegând originea sistemului în punctul fix O, avem $\vec{v}_O = 0$, iar relaţia (10.71) devine:

$$E = \frac{1}{2} J_{\Delta} \vec{\omega}^2, \qquad (10.78)$$

în care J_{Δ} reprezintă momentul de inerţie în raport cu axa instantanee de rotaţie (Δ) având cosinusurile directoare α, β, γ. Momentul de inerţie J_{Δ} are expresia (10.64):

$$J_{\Delta} = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\beta\gamma J_{yz} - 2\alpha\gamma J_{xz},$$

care, înlocuită în (10.78) rezultă:

$$E = \frac{1}{2}\left[J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{xz}\omega_x\omega_z\right], \qquad (10.79)$$

unde s-a înlocuit:

$$\omega_x = \omega\cos\alpha; \omega_y = \omega\cos\beta; \omega_z = \omega\cos\gamma.$$

Dacă reperul mobil solidar cu rigidul, este orientat după direcţiile

principale de inerție ce trec prin O, atunci momentele centrifugale sunt nule, iar energia cinetică are expresia

$$E = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_x^2 + J_2\omega_y^2 + J_3\omega_z^2\right). \qquad (10.80)$$

10.6.2. Energia potențială

Spre deosebire de energia cinetică, care este energia înmagazinată de corpuri în mișcare, energia potențială este o energie de poziție, care depinde de poziția în care se află corpul.

Energia potențială este o funcție numai de poziția sistemului material, atunci când acesta este acționat de **forțe conservative**. Energia de poziție a sistemului material respectiv, se definește ca fiind egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele ce acționează asupra lui, atunci când sistemul este deplasat din poziția dată, în poziția de referință, în care energia potențială se consideră nulă.

$$V = \int_A^0 dL = \int_A^0 dU = U_O - U_A. \qquad (10.81)$$

Dacă se alege valoarea funcției de forță în poziția de reper egală cu zero, $U_0 = 0$, rezultă că energia potențială este egală cu funcția de forță luată cu semnul minus, V = -U.

De exemplu, energia potențială a unui corp de greutate $\vec{G}$ este (conf.10.13):

$$V = -U = L_{A-O} = -L_{O-A} = \pm Gh, \qquad (10.82)$$

semnul plus corespunde situației în care corpul de greutate $\vec{G}$ se află deasupra poziției de referință, iar semnul minus situației în care corpul se află sub nivelul poziției de referință.

Pentru un corp elastic, cum ar fi de exemplu un arc cilindric elicoidal, energia potențială raportată la poziția nedeformată a arcului va fi (conf. 10.16):

$$V = -U = L_{A-O} = -L_{O-A} = \frac{Kx^2}{2} = \frac{Fx}{2}, \qquad (10.83)$$

unde K este constanta elastică a arcului; x-deformația arcului; F = Kx-forța elastică din arc.

Deci, arcul fie că este întins, fie că este comprimat, posedă o energie potențială pozitivă obținută prin înmagazinarea lucrului mecanic al forțelor care l-au acționat.

Pentru un arc poziția de reper în care energia potențială este nulă, este considerată poziția liberă a arcului (nedeformată) sau poziția de echilibru static al arcului.

10.7. IMPULSUL

Impulsul sau cantitatea de mişcare a unui punct material de masă m şi viteză $\vec{v}$ este mărimea vectorială $\vec{H}$ ce caracterizează mişcarea mecanică a punctului.

Prin definiție impulsul se exprimă prin relația:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}. \tag{10.84}$$

Relația (10.84) arată că impulsul este un vector coliniar cu viteza punctului având acelaşi sens iar ca mărime de "m" ori mai mare (v. fig.10.16).

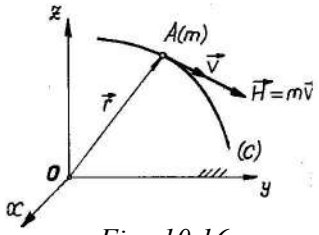


Fig. 10.16

Expresia analitică a impulsului într-un sistem de referință cartezian Oxyz este:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v} = m\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j} + m\dot{z}\vec{k},$$

unde

$$m\dot{x} = H_x; m\dot{y} = H_y; m\dot{z} = H_z, \tag{10.85}$$

sunt componentele scalare ale impulsului.

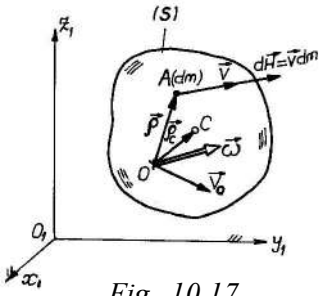


Fig. 10.17

Pentru **un solid rigid** în mişcare generală, impulsul se va calcula ca integrală a impulsului elementar (fig. 10.17). Un punct oarecare A, de masă elementară dm şi viteză $\vec{v}$ are un impuls elementar $d\vec{H} = \vec{v}dm$. Impulsul total al rigidului este:

$$\vec{H} = \int_{(S)} \vec{v}dm = \int_{(S)} (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{\rho})dm = \vec{v}_O \int_{(S)} dm + \vec{\omega} \times \left(\int_{(S)} \vec{\rho}dm \right).$$

ştiind că $\int_{(S)} dm = M$ şi $\int_{(S)} \vec{\rho} dm = M\vec{\rho}_c$, rezultă:

$$\vec{H} = \vec{v}_O M + \vec{\omega} \times \left(M\vec{\rho}_c\right) = M\left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right) = M\vec{v}_c$$

Vom avea deci:

$$\vec{H} = M\vec{v}_c. \qquad (10.86)$$

În concluzie, impulsul unui solid rigid este egal cu produsul dintre masa corpului şi viteza centrului său de masă, oricare ar fi mişcarea rigidului.

Unitatea de măsură a impulsului în sistemul internațional de măsură (S.I.) este kilogram-metru pe secundă (kg. m/s).

10.8. MOMENTUL CINETIC

Momentul cinetic **al unui punct material** de masă m şi viteză $\vec{v}$, în raport cu polul O, se definește ca fiind momentul vectorului impuls, calculat față de polul considerat (fig. 10.18):

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}. \qquad (10.87)$$

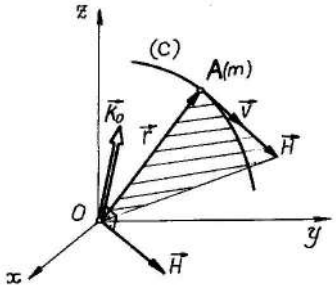


Fig.10.18

Din relația (10.87) rezultă că vectorul moment cinetic are originea în punctul O, direcția normală pe planul definit de vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{H}$, sensul dat de regula produsului vectorial, iar mărimea:

$$K_o = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{H}\right| \sin\left(\overset{\wedge}{\vec{r}, \vec{H}}\right). \qquad (10.88)$$

Expresia analitică a momentului cinetic, față de un sistem de referință cartezian cu originea în O este:

$$\vec{K}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = m\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right)\vec{i} + m\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right)\vec{j} + m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\vec{k},$$

unde $K_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), K_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), K_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}),$ (10.89)
sunt componentele scalare ale vectorului moment cinetic, egale cu momentele axiale ale impulsului.

Unitatea formată din vectorii ortogonali $(\vec{H}, \vec{K}_O)$ localizați în polul O, reprezintă torsorul impulsului $\vec{H}$ în polul O. Simbolic se notează astfel:

$$\tau_O(\vec{H}) = (\vec{H}, \vec{K}_O). \quad (10.90)$$

Momentul cinetic al rigidului în raport cu polul fix O_1 este egal cu integrala pe domeniul (S) a momentelor cinetice elementare:

$$\vec{K}_{O_1} = \int_{(S)} \vec{r} \times d\vec{H} = \int_{(S)} \vec{r} \times \vec{v} dm.$$

Înlocuind $\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}$, obținem:

$$\vec{K}_{O_1} = \int_{(S)} (\vec{r}_O + \vec{\rho}) \times \vec{v} dm = \int_{(S)} \vec{r}_O \times \vec{v} dm + \int_{(S)} \vec{\rho} \times \vec{v} dm = \int_{(S)} \vec{r}_O \times \vec{v} dm + \vec{K}_O.$$

Având în vedere că $\int_{(S)} \vec{v} dm = \int_{(S)} d\vec{H} = \vec{H}$ şi $\vec{r}_O = \overrightarrow{O_1O}$, rezultă:

$$\vec{K}_{O_1} = \vec{K}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{H}. \quad (10.91)$$

Relația (10.91) ne permite să facem următoarele observații:

a) Dacă impulsul total al rigidului se interpretează ca vectorul rezultant al sistemului de vectori impuls $(d\vec{H} = \vec{v} dm)$, atunci momentul cinetic poate fi interpretat ca moment rezultant al aceluiași sistem de vectori. Cei doi vectori $(\vec{H}, \vec{K}_O)$ localizați în polul fix O_1, formează torsorul impulsurilor rigidului în polul O_1.

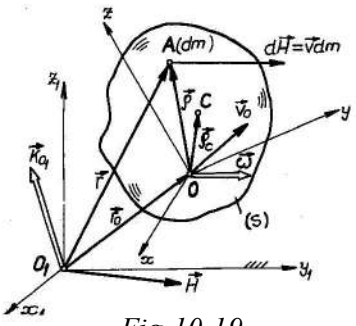


Fig.10.19

$$\tau_{O_1}(\vec{H}) = (\vec{H}, \vec{K}_{O_1}). \quad (10.92)$$

b) Relația (10.92) reprezintă teorema momentelor $(\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{R})$ aplicată sistemului de vectori impuls.

c) Dacă originea reperului mobil se

plasează în centrul de masă $O \equiv C$ al rigidului, relația (10.91) devine:

$$\vec{K}_{O_1} = \vec{K}_C + O_1C \times \vec{H}.$$

În relația (10.91) s-a notat prin $\vec{K}_O$ momentul cinetic în raport cu originea reperului mobil O. Acest moment cinetic se poate explicita, înlocuind $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$. Astfel că:

$$\vec{K}_O = \int_{(S)} \vec{\rho} \times \vec{v} dm = \int_{(S)} \vec{\rho} \times (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int_{(S)} \vec{\rho} \times \vec{v}_O dm + \int_{(S)} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm$$

unde:

$$\int_{(S)} \vec{\rho} \times \vec{v}_O dm = \int_{(S)} (\vec{\rho} dm) \times \vec{v}_O = \vec{S}_O \times \vec{v}_O = \vec{K}_O^{tr}, \tag{10.93}$$

reprezintă componenta de translație a momentului cinetic, iar:

$$\int_{(S)} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \vec{K}_O^{rot}, \tag{10.94}$$

reprezintă componenta de rotație a momentului cinetic. Pentru determinarea acestei componente se vor calcula separat produsele $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ şi $\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$, ținând seama că vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\rho}$ au componente pe cele trei axe ale sistemului de referință mobil solidar cu rigidul:

$$\begin{aligned}
\vec{K}_O^{rot} &= \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \\
&= \left[\omega_x \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_{(S)} xy dm - \omega_z \int_{(S)} xz dm \right] \vec{i} + \\
&+ \left[-\omega_x \int_{(S)} yx dm + \omega_y \int_{(S)} (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int_{(S)} yz dm \right] \vec{j} + \\
&+ \left[-\omega_x \int_{(S)} zx dm - \omega_y \int_{(S)} zy dm + \omega_z \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm \right] \vec{k}.
\end{aligned} \tag{10.95}$$

Având în vedere expresia matricei momentelor de inerție, relația (10.95) poate fi scrisă concentrat sub forma:

$$\vec{K}_O^{rot} = \int_{(S)} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [J_O][\vec{\omega}]. \tag{10.96}$$

Momentul cinetic față de polul O, devine:

$$\vec{K}_O = \vec{S}_O \times \vec{v}_O + [J_O][\vec{\omega}], \tag{10.97}$$

iar față de polul C:

$$\vec{K}_C = [J_C][\vec{\omega}], \text{ deoarece } \vec{S}_C = 0. \tag{10.98}$$

În final momentul cinetic al rigidului față de polul fix O_1 este:

$$\vec{K}_{O_1} = \vec{S}_O \times \vec{v}_O + [J_O][\vec{\omega}] + O_1O \times \vec{H}. \tag{10.99}$$

10.9. TORSORUL VECTORILOR IMPULS PENTRU DIFERITE CORPURI ÎN MIŞCARE

a) Rigid în mişcare de translație. Caracteristic mişcării de translație este faptul că vitezele punctelor rigidului sunt egale, la un moment dat: $\vec{v} = \vec{v}_O = \vec{v}_C$ iar $\vec{\omega} = 0$. Astfel, torsorul vectorilor impuls față de un polul fix O_1 este:

$$\tau_{O_1}(\vec{H}) \begin{cases} \vec{H} = M\vec{v}_C; \\ \vec{K}_{O_1} = \vec{K}_C + \overrightarrow{O_1C} \times \vec{H} = \overrightarrow{O_1C} \times \vec{H}, \end{cases} \tag{10.100}$$

deoarece $\vec{K}_c = 0$.

Față de centrul de masă, conform relațiilor (10.86) şi (10.98) torsorul este:

$$\tau_C(\vec{H}) \begin{cases} \vec{H} = M\vec{v}_C; \\ \vec{K}_C^{rot} = [J_O][\vec{\omega}] = 0, \end{cases} \tag{10.101}$$

deoarece $\vec{\omega} = 0$.

b) Rigid în mişcare de rotație cu axă fixă. În figura 10.20 se consideră un solid rigid în mişcare de rotație în jurul axei fixe O_1z_1. Se presupun cunoscute: viteza unghiulară $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ şi tensorul moment de

inerție $[J_O]$ în raport cu reperul atașat rigidului.

Torsorul vectorilor impuls în polul fix O_1 este:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=M\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_C\right)=Mv_x\vec{i}+Mv_y\vec{j};\\ \vec{K}_{O_1}=\vec{K}_O^{rot}=\left[J_O\right]\left[\vec{\omega}\right]=\begin{bmatrix}J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=\end{cases}$$

$$=-J_{xz}\omega\vec{i}-J_{yz}\omega\vec{j}+J_{zz}\omega\vec{k}. \qquad (10.102)$$

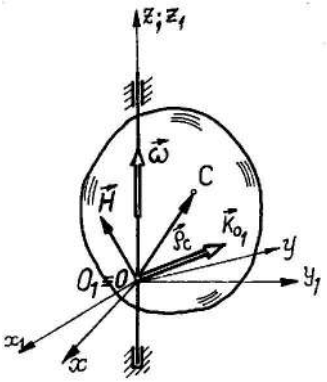


Fig. 10.20

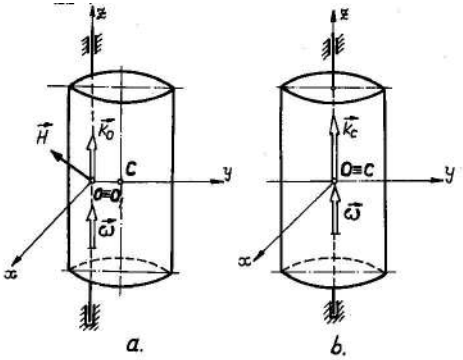


Fig. 10.21

În general, vectorul moment cinetic are componente diferite de zero pe cele trei axe de coordonate. În tehnică se urmărește ca momentul cinetic să fie orientat după axa de rotație. Această situație se obține când rigidul are o formă particulară şi admite un plan de simetrie perpendicular pe axa de rotație. În acest caz, momentele centrifugale sunt nule $J_{xz}=J_{yz}=0$, iar axa de rotație este axă principală de inerție.

Astfel, pentru cilindrul de masă M din figura 10.21,a axa de rotație este axă principală de inerție. Torsorul impulsurilor față de polul fix $O_1\equiv O$ este:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=-Mv_x\vec{i}+Mv_y\vec{j};\\ \vec{K}_{O_1}^{rot}=\left[J_O\right]\left[\vec{\omega}\right]=\begin{bmatrix}J_{xx} & -J_{xy} & 0\\ -J_{yx} & J_{yy} & 0\\ 0 & 0 & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=J_{zz}\omega\vec{k}.\end{cases}$$

(10.103)

Pentru cilindrul din figura 10.21,b axa de rotație este axă principală centrală de inerție. Torsorul impulsurilor față de polul fix $O_1\equiv O\equiv C$ este:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=0;\\ \vec{K}_{O_1}^{rot}=\left[J_O\right]\left[\vec{\omega}\right]=\begin{bmatrix}J_{xx} & 0 & 0\\ 0 & J_{yy} & 0\\ 0 & 0 & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=J_{zz}\omega\vec{k}.\end{cases}\qquad(10.104)$$

Alte exemple de corpuri în mişcare de rotație cu axă fixă sunt prezentate în figura 10.22.

Pentru discul de rază R şi masă M din figura 10.22,a torsorul impulsurilor în polul fix $O\equiv C$ este:

$$\tau_O\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=0;\\ \vec{K}_O^{rot}=\begin{bmatrix}J_{xx} & 0 & 0\\ 0 & J_{yy} & 0\\ 0 & 0 & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=J_{zz}\omega\vec{k}=\dfrac{MR^2}{2}\omega\vec{k}\end{cases}$$

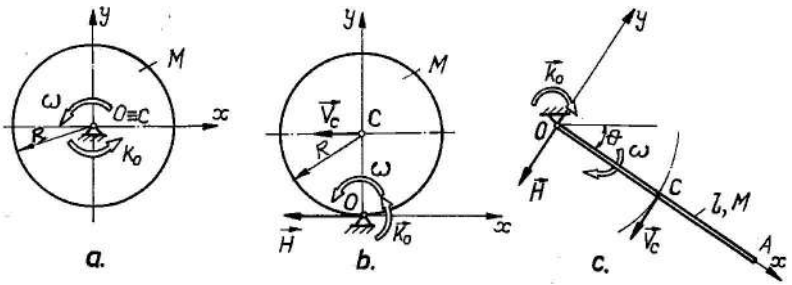


Fig. 10.22

Pentru discul de rază R şi masă M din figura 10.22,b torsorul impulsurilor față de polul fix O este:

$$\tau_O\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=-M\omega R\vec{i};\\ \vec{K}_O^{rot}=\begin{bmatrix}J_{xx} & -J_{xy} & 0\\ -J_{yx} & J_{yy} & 0\\ 0 & 0 & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=J_{zz}\omega\vec{k}=\frac{3}{2}MR^2\omega\vec{k}.\end{cases}$$

Pentru bara de lungime l şi masă M ce se roteşte cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul articulației O, torsorul impulsurilor față de polul fix O este (fig.10.22,c):

$$\tau_O\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=-M\omega\frac{l}{2}\vec{j};\\ \vec{K}_O^{rot}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & J_{yy} & 0\\ 0 & 0 & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=J_{zz}\omega\vec{k}=-\frac{Ml^2}{3}\omega\vec{k}.\end{cases}$$

c) Rigid în mişcare elicoidală cu axă fixă. În cazul general când centrul de masă nu se află pe axa mişcării elicoidale (fig.10.23), torsorul vectorilor impuls, față de polul fix O_1 este:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=Mv_x\vec{i}+Mv_y\vec{j}+Mv_z\vec{k};\\ \vec{K}_{O_1}=\vec{S}_O\times\vec{v}_O+\left[J_O\right]\vec{\omega}+\overrightarrow{O_1O}\times M\vec{v}_C.\end{cases}\qquad(10.105)$$

Dacă centrul de masă se află pe axa mişcării elicoidale, caz des întâlnit în tehnică (şurubul, burghiul etc), torsorul vectorilor impuls are expresia:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}=Mv_z\vec{k};\\ \vec{K}_{O_1}=\left[J_O\right]\vec{\omega}=\begin{bmatrix}J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}=\\ \left(-J_{xz}\omega\vec{i}-J_{yz}\omega\vec{j}+J_{zz}\omega\vec{k}\right).\end{cases}\qquad(10.106)$$

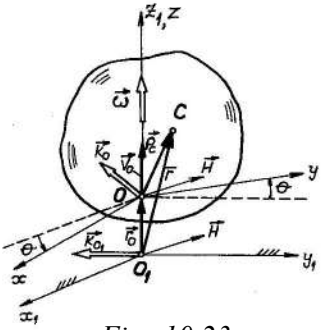


Fig. 10.23

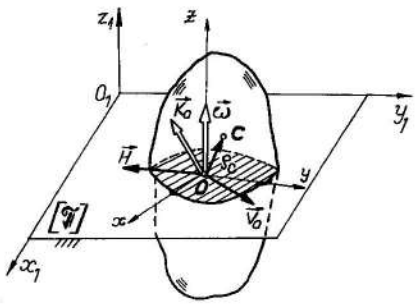


Fig. 10.24

d) Rigid în mişcare plan-paralelă. În aceste caz distribuţia de viteze se obţine prin suparpunerea a două câmpuri de viteze corespunzătoare unei mişări de translaţie şi unei mişcări de rotaţie. Momentul cinetic faţă de polul O (fig.10.24) se va calcula corespunzător celor două câmpuri de viteze cu ajutorul relaţiei (10.97):

$$\tau_O\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H} = M\vec{v}_C = Mv_x\vec{i} + Mv_y\vec{j};\\ \vec{K}_O = \vec{K}_O^{tr} + \vec{K}_O^{rot} = \vec{S}_O \times \vec{v}_O + [J_O][\vec{\omega}].\end{cases} \qquad (10.107)$$

Dacă $O \equiv C$, şi planul director $[\pi]$ este plan de simetrie, momentele centrifugale sunt nule $\left(J_{xz} = J_{yz} = 0\right)$, iar torsorul vectorilor impuls are următoarea exprimare:

$$\tau_C\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H} = M\vec{v}_C = Mv_x\vec{i} + Mv_y\vec{j};\\ \vec{K}_C^{rot} = [J_C][\vec{\omega}] = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0\\ -J_{yx} & J_{yy} & 0\\ 0 & 0 & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix} = J_{zz}\omega\vec{k}.\end{cases} \qquad (10.108)$$

Ştiind că distribuţia de viteze în mişcarea plan-paralelă, faţă de centrul instantaneu de rotaţie (C.I.R.) este asimilabilă cu cea a unei rotaţii în jurul unei axe instantanee care trece prin C.I.R., se pot folosi rezultatele de la mişcarea de rotaţie cu axă fixă. Astfel, torsorul impulsurilor faţă de $I \equiv O$, este:

$$\tau_I\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=Mv_x\vec{i}+Mv_y\vec{j};\\ \vec{K}_I^{rot}=\left[J_I\right]\left[\vec{\omega}\right]=J_{zI}\omega\vec{k}.\end{cases} \tag{10.109}$$

De exemplu, pentru discul de rază R şi masă M (fig.10.25) ce se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal cu viteza $\vec{v}_C$ şi viteza unghiulară $\vec{\omega}$ torsorul impulsurilor faţă de I are expresia:

$$\tau_I\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=MR\omega\vec{i};\\ \vec{K}_I^{rot}=\left[J_I\right]\left[\vec{\omega}\right]=J_{\Delta I}\vec{\omega}=\dfrac{3}{2}MR^2\omega\vec{k}.\end{cases} \tag{10.110}$$

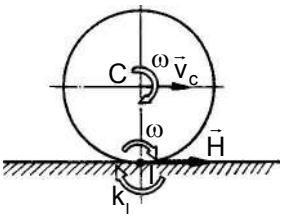


Fig. 10.25

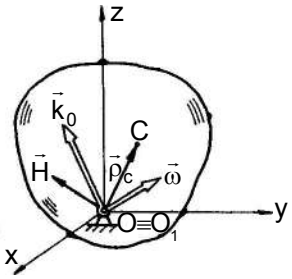


Fig. 10.26

e) Rigid în mişcare cu punct fix. În acest caz originea sistemului de referinţă mobil se alege în punctul fix O_1, iar viteza unghiulară instantanee are componentele după cele trei axe (v. fig.10.26). Torsorul vectorilor impuls în polul fix O_1 are următoarele componente:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=Mv_x\vec{i}+Mv_y\vec{j}+Mv_z\vec{k};\\ \vec{K}_{O_1}=\left[J_{O_1}\right]\left[\vec{\omega}\right]=\begin{bmatrix}J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}.\end{cases}$$

Dacă axele sistemului de referinţă sunt orientate după axele principale de inerţie în raport cu polul O_1, momentele centrifugale sunt nule, iar torsorul impulsurilor are următoarele componente:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{H}\right)\begin{cases}\vec{H}=M\vec{v}_C=Mv_x\vec{i}+Mv_y\vec{j}+Mv_z\vec{k};\\ \vec{K}_{O_1}^{rot}=\begin{bmatrix}J_{xx}&0&0\\0&J_{yy}&0\\0&0&J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=J_{xx}\omega_x\vec{i}+J_{yy}\omega_y\vec{j}+J_{zz}\omega_z\vec{k}.\end{cases}$$

10.10 PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze randamentul unui plan înclinat cu un unghi $\alpha=30^\circ$, dacă coeficientul de frecare este m=0,3.

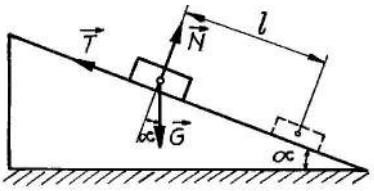


Fig. 10.27

Rezolvare. Se consideră corpul de greutate G din figura 10.27, care alunecă pe planul înclinat de unghi a, pe distanța l. Randamentul mecanic conform relației (12.31) este:

$$\eta=\frac{L_U}{L_C}=\frac{L_U}{L_U+L_P}=\frac{G\sin\alpha l}{G\sin\alpha l+\mu G\cos\alpha l}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}.$$

Înlocuind m=0,3 şi $\alpha=30^\circ$, rezultă:

$$\eta=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ+0{,}3\cos 30^\circ}=\frac{0{,}5}{0{,}5+0{,}3\sqrt{3}/2}=0{,}658(65{,}8\%).$$

2. Un ciocan cu aer comprimat, cântărind Q=1500 N, este ridicat la înălțimea h=0,75 m de n=84 ori pe minut.

Să se calculeze puterea consumată de maşină, dacă randamentul acesteia se compune din $\eta_1=0{,}855$ corespunzător mecanismului de comandă şi $\eta_2=0{,}76$ pentru piston şi glisierele ciocanului.

Rezolvare. Randamentul total al maşinii este:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0{,}855 \cdot 0{,}76 = 0{,}65.$$

Lucrul mecanic pentru o ridicare a sarcinii Q este:

$$L_1 = Q \cdot h = 1500 \cdot 0{,}75 = 1125\text{J}.$$

Lucrul mecanic efectuat timp de un minut:

$$L = n \cdot L_1 = 84 \cdot 1125 = 94500\text{J}.$$

Puterea utilă a maşinii este:

$$P_U = \frac{L}{t} = \frac{94500}{60} = 1575\text{W}.$$

Puterea consumată de maşină:

$$P_C = \frac{P_U}{\eta} = \frac{1575}{0{,}65} = 2423\text{W} = 2{,}423\text{kW}.$$

3. Presiunea gazelor pe pistonul unui motor este $p = 5 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$. Diametrul pistonului este d=0,2 m, iar lungimea cursei este s=0,4 m.

Rezolvare. Forţa ce acţionează asupra pistonului este:

$$F = pA = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} = 5000\pi.$$

Lucrul mecanic corespunzător pentru o cursă va fi:

$$L_1 = F \cdot s = 5 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0{,}4 = 2000\pi\text{J}.$$

Puterea maşinii rezultă:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{N \cdot L_1}{t} = \frac{100 \cdot 2000 \cdot \pi}{60} = 10466{,}66\text{W}.$$

4. Să se determine momentele de inerţie polare J_O, J_A, J_B şi momentele de inerţie axiale J_x, J_y, J_z ale barei omogene de lungime l şi masă m (fig. 10.28).

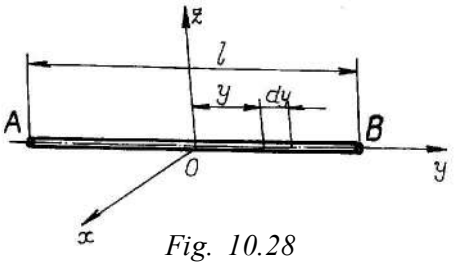


Fig. 10.28

Rezolvare. La distanța y față de O se detașează un element de lungime dy. Se aplică relația (10.49):

$$J_O = \frac{m}{l}\int_L \delta^2 dl = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy =$$

$$= \frac{m}{3l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) = \frac{ml^2}{12};$$

$$J_A = J_B = \frac{m}{l}\int \delta^2 dl = \frac{m}{l}\int_0^l y^2 dy = \frac{ml^2}{3};$$

$$J_x = J_z = J_O = \frac{ml^2}{12} \text{ iar } J_y = 0,$$

masa m a barei fiind distribuită de-a lungul axei Oy.

5. Să se determine momentele de inerție axiale ale unei plăci omogene, dreptunghiulare având dimensiunile din figura 10.29, și masa M.

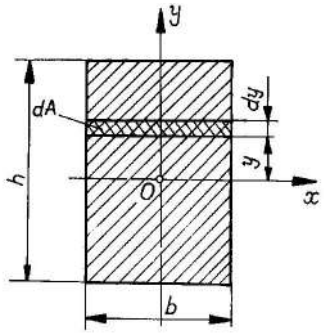


Fig. 10.29

Rezolvare. Se detașează un element de suprafață dA sub forma unui dreptunghi de lungime b și înălțime dy. Se aplică relația (1051):

$$J_x = \frac{M}{A}\int_{(A)} \delta^2 dA = \frac{M}{b\cdot h}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{M}{b\cdot h}\cdot b\cdot\left(\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}\right) = \frac{M\cdot h^2}{12}.$$

În mod analog, rezultă: $J_y = \frac{M\cdot b^2}{12}$.

$$J_z = J_O = J_x + J_y = \frac{M}{12}\left(b^2+h^2\right).$$

6. Pentru placa omogenă de masă M sub forma unui sfert de cerc (fig.10.30) de rază R, să se calculeze momentele de inerţie axiale şi centrifugal.

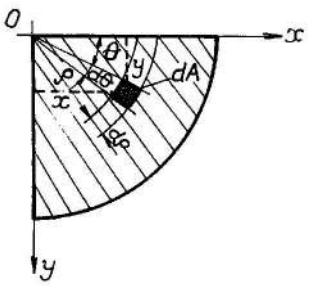


Fig.10.30

Rezolvare. Se detaşează un element de arie dA = r dr dq, cu ajutorul coordonatelor polare r şi q, la distanţele x = r cosq şi y = r sinq faţă de axele de coordonate Ox şi respectiv, Oy. Se aplică relaţiile (10.51) şi (10.52):

$$J_x = \frac{M}{A}\int_{(A)} y^2 dA = \frac{M}{A}\iint \rho^2 \sin^2\theta \rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{M}{A}\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = \frac{4M}{\pi R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{mR^2}{4}.$$

Deci, $J_y = \frac{mR^2}{4}$ iar $J_z = J_O = J_x + J_y = \frac{mR^2}{2}$.

$$J_{xy} = \frac{M}{A}\int_{(A)} xy dA = \frac{M}{A}\iint \rho^3 \sin\theta\cos\theta d\rho d\theta =$$

$$= \frac{M}{A}\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{4M}{\pi R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta = \frac{mR^2}{2\pi}.$$

7. Să se calculeze momentele de inerţie planare şi axiale, ale unui paralelipiped de masă M, având dimensiunile din figura 10.31.

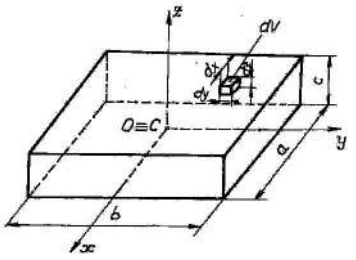


Fig. 10.31

Rezolvare. Se detaşează un element de volum dV=dxdydz la distanţele x, y şi respectiv z faţă de planele sistemului de referinţă, cu originea în centrul de masă al paralelipipedului (v. fig.10.31).

Se aplică relațiile de tipul (10.53). Momentele de inerție planare sunt:

$$J_{yOz}=\frac{M}{V}\int_V x^2dV=\frac{M}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}x^2dxdydz=$$

$$=\frac{M}{abc}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cdot\frac{y}{1}\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{z}{1}\Bigg|_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}=\frac{m}{abc}\cdot\frac{1}{12}a^3bc=\frac{ma^2}{12};$$

$$J_{xOy}=\frac{M}{V}\int_V z^2dV=\frac{M}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}z^2dxdydz=\frac{mc^2}{12}.$$

$$J_{xOz}=\frac{M}{V}\int_V y^2dV=\frac{M}{abc}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}y^2dxdydz=\frac{mb^2}{12}.$$

Aplicând relațiile (12.47) se determină momentele de inerție axiale:

$$J_x=J_{xOy}+J_{xOz}=\frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right);$$

$$J_y=J_{yOz}+J_{xOy}=\frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right);$$

$$J_z=J_{xOz}+J_{yOz}=\frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right);$$

5. Să se calculeze momentele de inerție mecanice ale unui con omogen de masă M, rază R și înălțime H (fig. 10.32).

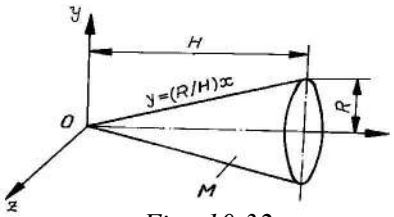


Fig. 10.32

Rezolvare. Conul este un corp de rotație, curbe ce limitează

suprafaţa de rotaţie este o dreaptă de ecuaţie y = (R/H) x, în planul xOy (v. fig. 10.32). Aplicând relaţiile (10.56) şi (10.57) rezultă:

$$J_x = \frac{M}{V}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^H y^4(x)dx = \frac{3M}{\pi R^2 H}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^H \frac{R^4}{H^4}x^4 dx = \frac{3}{10}MR^2;$$

$$J_{yOz} = \frac{M}{V}\cdot\pi\int_0^H x^2 y^2(x)dx = \frac{3M}{\pi R^2 H}\cdot\pi\int_0^H x^2\frac{R^2}{H^2}x^2 dx = \frac{3}{5}MH^2.$$

Aplicând relaţiile (10.57) rezultă următoarele momente de inerţie:

$$J_y = J_z = \frac{1}{2}J_x + J_{yOz} = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}MH^2 = \frac{3}{20}M\left(R^2+4H^2\right);$$

$$J_{xOz} = J_{xOy} = \frac{1}{2}J_x = \frac{3}{20}MR^2;$$

$$J_O = J_x + J_{yOz} = \frac{3}{10}MR^2 + \frac{3}{5}MH^2 = \frac{3}{10}M\left(R^2+2H^2\right).$$

6. Pentru placa omogenă de masă M, având forma şi dimensiunile din figura 10.33 a să se determine momentele de inerţie J_x, J_y şi momentul centrifugal J_{xy}.

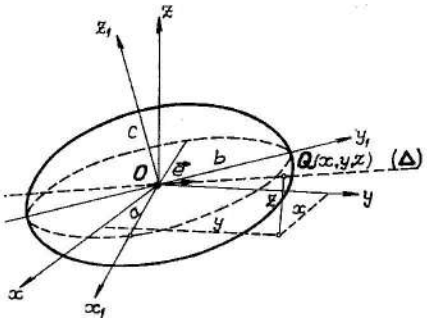


Fig. 10.33

Rezolvare. a) Notând cu ρ_A densitatea superficială a plăci, masa ei este:

$$M = \rho_A\left(2a\cdot 6a + 2a\cdot 2a\right) = 16\rho_A a^2.$$

S-a considerat placa omogenă formată dintr-un dreptunghi $2a\times 6a$ şi un pătrat $2a\times 2a$.

Aplicând relaţiile lui Steiner (10.60) de două ori, pentru cele două suprafeţe, rezultă:

$$J_x = (\rho_A \cdot 2a \cdot 6a)\frac{(6a)^2}{12} + (\rho_A \cdot 2a \cdot 6a)(3a)^2 + (\rho_A \cdot 2a \cdot 2a)\frac{(2a)^2}{12} +$$

$$+ (\rho_A \cdot 2a \cdot 2a)(5a)^2 = \frac{736\rho_A a^4}{3} = \frac{(16\rho_A a^2)\cdot 46a^2}{3} = \frac{46Ma^2}{3};$$

$$J_y = (\rho_A \cdot 12a^2)\frac{(2a)^2}{12} + (\rho_A \cdot 12a^2)a^2 + (\rho_A \cdot 4a^2)\frac{(2a)^2}{12} +$$

$$+ (\rho_A \cdot 4a^2)(3a)^2 = \frac{160\rho_A a^4}{3} = \frac{(16\rho_A a^2)\cdot 10a^2}{3} = \frac{10Ma^2}{3}.$$

Aplicând relațiile lui Steiner pentru momentele centrifugale (12.63) rezultă:

$$J_{xy} = 0 + (\rho_A \cdot 2a \cdot 6a)a \cdot 3a + 0 + (\rho_A \cdot 2a \cdot 2a)3a \cdot 5a = 96\rho_A \cdot a^4 =$$
$$= (16\rho_A \cdot a^2)6a^2 = 6Ma^2.$$

7. Volantul unui motor Diesel are diametrul exterior D=2R=1,6m, diametrul interior d=2r=1,2m, iar grosimea coroanei a=0,13m (fig. 10.34). Greutatea specifică a oțelului fiind $\gamma = 72 \cdot 10^3 \, N/m^3$, să se calculeze energia sa cinetică la o turație de 360 rot/ min.

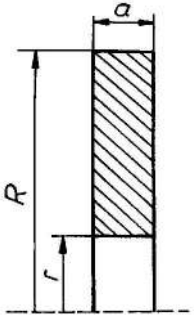


Fig. 10.34

Rezolvare. Se aplică relația (10.53), detașându-se un element de volum $dV = \rho d\rho d\theta dx$, la distanța r față de axa volantului. Momentul de inerție este:

$$J_x = \frac{M}{V}\int_{(V)} \rho^2 dV = \frac{M}{V}\iiint \rho^3 d\rho d\theta dx = \frac{M}{V}\int_0^a dx \int_r^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{M}{V} 2\pi \frac{R^4 - r^4}{4} a = \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)a} 2\pi \frac{(R^4 - r^4)a}{4} = \frac{M(R^2 + r^2)}{2}.$$

Energia cinetică este dată de relația (10.78):

$$E_c = \frac{1}{2} J_x \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma V}{g} \frac{\left(R^2 + r^2\right)}{2} \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = \frac{\pi^2 a \left(R^4 - r^4\right) \gamma n^2}{2700 g}.$$

Pentru aplicația numeric rezultă:

G=8,230 kN, J=420 kg. m^2; w=37,68 rad/s; E_c =29. 104 J.

8. Un regulator cu bile de masă m_1 are un manşon de masă m care alunecă de-a lungul unei tije verticale (fig.10.35). Întregul ansamblu se roteşte în jurul axului vertical cu viteza unghiulară variabilă w. Ştiind că momentul de inerție al suportului în formă de T este J, să se calculeze energia cinetică totală a regulatorului, neglijând greutățile barelor de susținere de lungime l.

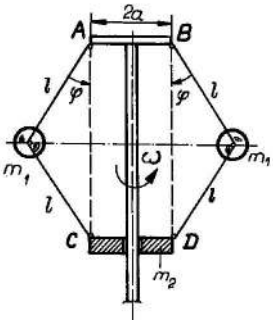


Fig.10.35

Rezolvare. Energia cinetică totală a regulatorului este suma energiilor cinetice ale părților componente aflate în mişcare: suportul în formă de T, cele două bile şi manşonul.

$$E_1 = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

-Energia cinetică a celor două bile care, au o mişcare de rotație în jurul axului vertical cât şi o mişcare de rotație în jurul articulațiilor A, respectiv B, cu viteza unghiulară $\omega_1 = d\varphi / dt$.

$$E_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 \left(a + l \cdot \sin\varphi\right)^2 \omega^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} l^2 \omega_1^2 \cdot m_1.$$

-Energia cinetică a manşonului, care are o mişcare de rotație în jurul axului vertical şi o mişcare de translație de-a lungul axei cu viteza v_2, de forma $v_2 = 2l\dot{\varphi}\sin\varphi$:

$$E_3 = \frac{1}{2} m_2 \frac{a^2}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(4l^2 \sin^2\varphi\right) \omega_1^2.$$

Energia cinetică totală a sistemului este:

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2+m_1\left[(a+l\sin\varphi)^2\omega^2+l^2\omega_1^2\right]+\frac{1}{2}m_2\left[\frac{a^2}{2}\omega^2+4l^2\omega_1^2\sin^2\varphi\right]$$

9. Pneul de rază r şi masă M al unui automobil ce execută un viraj de rază R, se rostogoleşte fără alunecare, pe un drum orizontal. Ştiind că viteza centrului roţii este $\vec{v}_c$, să se calculeze energia sa cinetică (v. fig. 10.36).

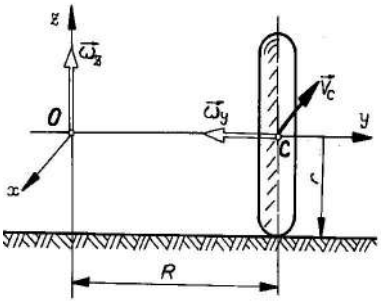


Fig. 10.36

Rezolvare. Mişcarea absolută a roţii este o rotaţie cu un punct fix (O) şi prin urmare, energia sa cinetică conform (12.87) se va scrie astfel:

$$E_c=\frac{1}{2}\left[\omega_x,\omega_y,\omega_z\right]\begin{bmatrix}J_{xx}&0&0\\0&J_{yy}&0\\0&0&J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}.$$

unde:

$$\omega_x=0;\omega_y=-\frac{v_c}{r};\omega_z=\frac{v_c}{R}.;\quad J_{xx}=J_{zz}=\left(\frac{Mr^2}{4}+MR^2\right);\quad J_{yy}=\frac{Mr^2}{2}.$$

Deci,

$$E_c=\frac{1}{2}\left[0;-\frac{v_c}{r};\frac{v_c}{R}\right]\begin{bmatrix}\left(\frac{Mr^2}{4}+MR^2\right)&0&0\\0&\frac{Mr^2}{2}&0\\0&0&\left(\frac{Mr^2}{4}+MR^2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-\frac{v_c}{r}\\\frac{v_c}{R}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}Mv_c^2\left(\frac{3}{2}+\frac{r^2}{4R^2}\right).$$

10. O bară omogenă OA, de lungime l şi greutate $\vec{G}$, se deplasează într-un plan vertical (fig. 10.37), astfel încât extremităţile O şi A alunecă de-a lungul a doi pereţi perpendiculari. Cunoscând viteza la un moment dat $\vec{v}_O$, să se determine impulsul barei şi momentul cinetic în raport cu centrul de masă C şi cu centrul instantaneu de rotaţie I.

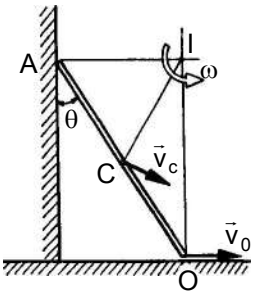


Fig. 10.37

Rezolvare. Poziţia centrului instantaneu de rotaţie se află la intersecţia perpendicularelor ridicate în O şi A pe direcţiile celor două viteze. Faţă de C. I. R. vitezele punctelor C şi O sunt:

$$v_O = \omega \cdot IC \text{ iar } v_O = \omega \cdot IO = \omega l \cos\theta. \text{ de}$$

unde $\omega = \dfrac{v_O}{l\cos\theta}$ °i $v_C = \dfrac{v_O}{2\cos\theta}$, ştiind că $IC = \dfrac{l}{2}$.

Impulsul barei conform (12.96) este:

$$H = Mv_C = \frac{Gv_O}{2g\cos\theta}.$$

Momentul cinetic al barei în raport cu polul C conform (10.119) este:

$$K_C^{rot} = J_C \cdot \omega = \frac{Ml^2}{12} \cdot \omega = \frac{Glv_O}{12g\cos\theta_O}.$$

Momentul cinetic al barei în raport cu I se poate determina aplicând relaţia (12.102) sau (12.120):

$$K_I = K_C^{rot} + IC \cdot H = \frac{Glv_O}{12g\cos\theta} + \frac{Gv_O}{2g\cos\theta} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Glv_O}{3g\cos\theta}.$$

11. Mecanismul planetar din figura 10.38 este format din roata fixă 1 de rază R, manivela 2 de masă M_2 şi lungime $O_1O_2 = R + r$, având o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară ω_2 în jurul unei axe perpendiculare

ce trece prin O_1, şi roata mobilă 3 de masă M_3 şi rază r, antrenată de manivela 2. Să se determine momentul cinetic total al sistemului de corpuri în polul fix O_1.

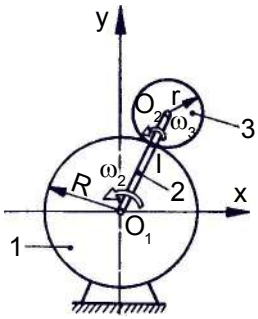


Fig.10.38

Rezolvare. Momentul cinetic al sistemului este un vector orientat după axa O_1z, perpendiculară pe planul în care are loc mişcarea, fiind egal cu suma momentelor cinetice ale părţilor componente:

$$K_{O_1} = K_{O_1}^{(1)} + K_{O_1}^{(2)} + K_{O_1}^{(3)}. \quad (10.123)$$

Momentul cinetic al roţii fixe (1) este:

$$K_{O_1}^{(1)} = 0; (\omega_1 = 0)$$

Momentul cinetic al manivelei (2):

$$K_{O_1}^{(2)} = J_{O_1}\omega_2 = \frac{M_2(R+r)^2}{3}\omega_2. \quad (10.124)$$

Momentul cinetic al roţii (3) conform relaţiei (10.110) este:

$$K_{O_1}^{(3)} = K_C^{(3)} + O_1C \cdot H = J_C^{(3)}\omega_3 + (R+r)\cdot M_3 v_{O_2},$$

în care se înlocuieşte:

$$J_C^{(3)} = \frac{M_3 r^2}{2}; \omega_3 = \frac{\omega_2(R+r)}{r}; v_{O_2} = \omega_3 r = \omega_2(R+r).$$

Rezultă: $K_{O_1}^{(3)} = \frac{M_3 r(R+r)}{2}\omega_2 + (R+r)^2 \cdot M_3\omega_2.$ (10.125)

Înlocuind (10.124) şi (10.125) în (10.123) rezultă momentul cinetic al sistemului de corpuri:

$$K_{O_1} = \frac{\omega_2(R+r)}{6}\cdot\left[2M_2(R+r) + 3M_3(2R+3r)\right].$$

10.11 PROBLEME PROPUSE

1. Ecuațiile mișcării unui mobil de masă m = 2 kg, sunt: x = 2sint şi y = cos(m). Să se determine lucrul mecanic între t = 0 şi $t = \frac{\pi}{2}$sec .

R: L = 3 j

2. Ecuațiile mișcării unui punct material de masă m = 1 kg, sunt: x = t şi $y = e^t$, (m). Se cere lucrul mecanic efectuat de la t = 0 la t = 2sec.

R: L = 4 J

3. Un punct material de masă şi descrie un arc din cercul de rază R, cuprins între A(0;R) şi B(R;0). Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța ale cărei componente sunt: X = mxy şi $Y = my^2$.

R: L = 0

4. Fie eclipsă $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, şi forța de componente X = mx şi Y = -my, care acționează asupra mobilului de masă m, ce se deplasează pe curbă. Să se determine poziția de echilibru stabil.

R: x = 0

5. Fie parabola cubică $y = x^3$ pe care este situat un punct material de masă m, asupra căruia acționează forța F de componente X = mx şi Y = mg. Să se găsească poziția de echilibru stabil.

R: A(x = 0; y = 0) B($x = \frac{1}{3g}$; $y = \frac{1}{27g^3}$)

6. O pompă cu puterea de 3678,75 w şi randamentul 0,6, terbuie să ridice 900 m^3 de apă la înălțimea de 9 m. De cât timp este nevoie pentru aceasta?

R: t = 10 ore.

7. Un automobil având (împreună cu încărcătura) greutatea de 2tf,

parcurge distanța de 30 km cu viteza de 25 km/h, pe un drum care urcă cu 50 m. Coeficientul de frecare al drumului este de 0,05. Să se determine puterea motorului automobilului, dacă randamentul lui este de 0,6.

R: $P_m = 7063{,}2$ W

8. Cât de mare trebuie să fie diametrul pistonului unei maşini cu abur, cu un cilindru, la presiunea aburului de 9,8 N/cm^2 asupra pistonului, viteza pistonului v = 2 m/s şi puterea maşini de 55 153, 25 W?

R: d = 0,3 m

9. Pe roata unei mori de apă, cu un randament de 0,6 cade apă de la o înălțime de 3 m. Ce cantitate de apă trebui să cadă pe roată, într-o secundă, ca să i se transmită o putere de 10.036, 25 W.

R: $Q = \frac{5}{8} m^3$

10. Pe o linie de tranvai circulă 300 vagoane cu viteza medie de 15 km/h. Greutatea fiecărui vagon este de 12 t. Forța de frecare la înaintare a vagonului este de 0,02 din greutatea sa. Să se determine puterea maşinilor centralei de forță a tramvaielor.

R: $P = 22{,}43 \cdot 10^5$ W.

11. Un mobil de masă nu descrie partea din parabola $y^2 = 2x$, cuprinsă între x = 2 şi y = 8. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța orizontală F = 2my.

R: $L = \frac{112}{3} m$

12. Asupra unui corp acționează o forță a căreri dependență de distanță este ilustrată în figura 10.39. Cât este lucrul mecanic al forței?

R: L = 300J

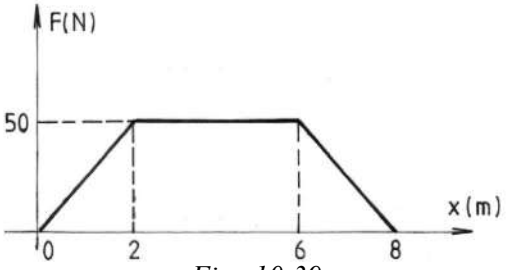


Fig. 10.39.

13. Un om pune în mişcare pe o suprafață orizontală un corp de masă m = 20 kg acționând asupra lui cu o forță F = 50 N. Direcția forței face cu orizontala un unghi $\alpha = 30^o$ iar acțiunea omului asupra corpului durează 3 secunde. Forțele de frecare sunt neglijabile. Cât este lucrul mecanic efectuat de om?

R: L = 421,8J

14. O macara ridică un corp cu masa m = 300 kg la înălțimea h = 5m cu o viteză constantă. Cât este lucrul mecanic efectuat dacă g = 10m/s? Dacă ridicarea corpului se face accelerat cu a = $2m/s^2$, cât este lucrul mecanic în acest caz.

R: a) L = 15.000 J

b) L = 18.000 J

15. Energia necesară baterii țesăturii cele mai dense, s-a constatat că este echivalentă cu lucrul mecanic efectuat de un corp în greutate de 10 N, căzând de la 0,45 m înălțime. Ştiind că baterea se face în 0,025 s, să se determine puterea P_c a unui electromotor, cu randamentul $\eta = 0,8$ care ar executa această operație.

R: $P_c = 0,41kW$

16. Două resorturi sunt montate într-un tub orizontal fix, fiind separate printr-un piston mobil. Primul resort are o constantă de elasticitate k_1 şi este fixat de cilindru. Al doilea are constanta k_2 şi este ghidat de tija unui piston mobil. În stare nedeterminată se cunoaşte d. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a realiza contactul între primul piston şi tija celui de-al doilea?

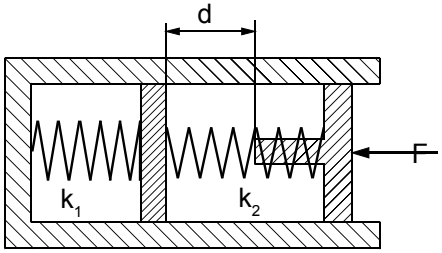


Fig. 10.40.

R: $k_2(k_1+k_2)d^2/2k_1$

17. O rabotează efectuează 10 curse de lucru pe minut, fiecare

având lungimea de 1,8 m. Cunoscând că pentru deplasarea uniformă a masei în cursa de lucru este necesară o forță de 4 kN, să se determine lucrul mecanic şi puterea efectivă a maşinii.

R: L = 7,2 kJ; P = 1,63 CP

18. Să se calculeze momentele de inerție J_{ox}, J_{o1x1}, J_{oy}, J_o, J_{o1} ale suprafeței cuprinse între cercurile de rază R şi r, distanța între centrele celor două cercuri fiind a, iar masa M.

R:

$$J_{ox} = \frac{M}{4}\left[r^2\left(1 - \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + R^2 \right];$$

$$J_{o_1x_1} = \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right);$$

$$J_{oy} = \frac{M(R^2 + r^2)}{4};\ M = \pi\rho(R^2 - r^2);$$

$$J_o = J_{ox} + J_{oy};\ J_{o_1} = J_{o_1x_1} + J_{oy}$$

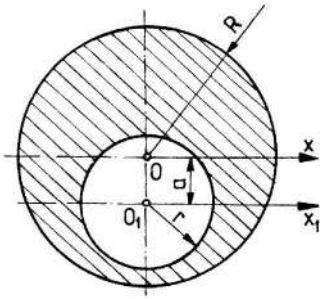


Fig. 10.41.

19. Să se determine momentele de inerție geometrice principale centrale şi direcțiile principale centrale de inerție, pentru suprafața compusă din dreptunghiuri din figura 10.42.

R: $I_{oy} = 1{,}74 \cdot 10^6\ mm^4;$

$$I_{yz} = 3{,}36 \cdot 10^6\ mm^4.$$

$$tg2\alpha = -0{,}519;\ \alpha_1 = 13^o45';\ \alpha_2 = 103^o45'$$

$$I_{max} = 1{,}553 \cdot 10^4\ mm^4;\ I_{min} = 9{,}3 \cdot 10^5\ mm$$

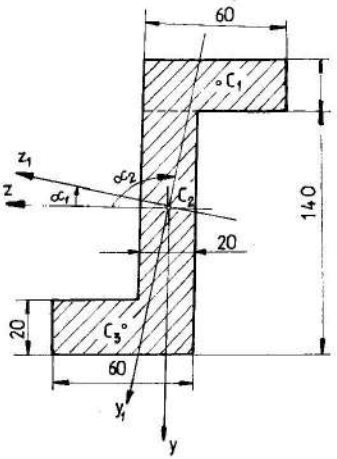


Fig.10.42

20. Pentru bara cotită AOBD, omogenă, de masă M să se determine:

a) Poziția centrului de greutate a barei;

b) Momentele de inerție mecanice J_{oz} şi J_{cz}', unde cz' este axa centrală paralelă cu oz, care trece prin centrul de masă al barei.

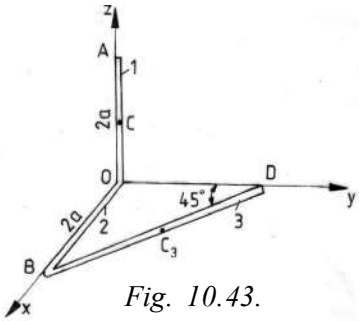


Fig. 10.43.

R:

a) $x_c = 0{,}707a;\ y_c = 0{,}414a;\ z_c = 0{,}292a;$

b) $J_{oz} = 1{,}491a^2M;\ J_{cz'} = 0{,}820a^2M$

21. Să se determine axele, momentele şi razele de inerție principale centrale pentru secțiunea plană din figura 10.44 formată dintr-un profil U-20 şi un cornier cu aripi inegale 80x120x10.

R: Poziția centrului de greutate față de sistemul C_1y_1z

$y_c = -44{,}5$ mm; $z_c = -22{,}6$ mm.

Momentele de inerție geometrice:

$I_{cy} = 8{,}66 \cdot 10^6$ mm^4;

$I_{cz} = 3{,}72 \cdot 10^8$ mm^4;

$I_{yz} = 9{,}66 \cdot 10^6$ mm^4

Momentele principale centrale de inerție:

$I_1 = I_{min} = 5{,}69 \cdot 10^6$ mm^4;

$I_2 = I_{max} = 4{,}017 \cdot 10^7$ mm^4

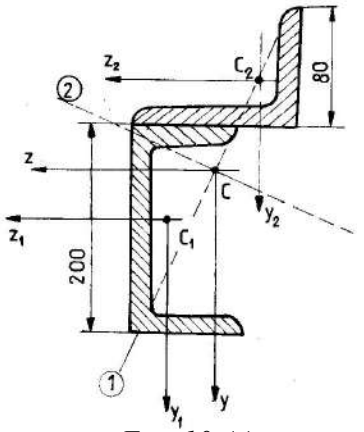


Fig. 10.44

22. Să se determine momentul de inerție polar J_o, al sistemului de corpuri din figura 10.45, format dintr-o bară omogenă OA de lungime 8a şi greutate G şi cercul material de rază R = 3a şi greutate 2G.

R: $J_0 = 281{,}33\dfrac{Ga^2}{g}$

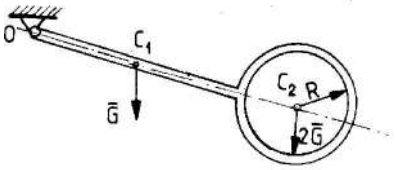


Fig. 10.45

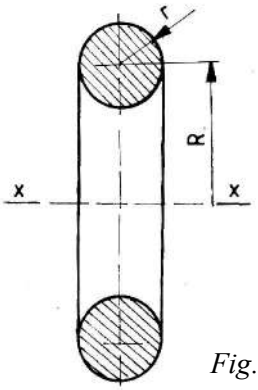


Fig. 10.46

23. Să se determine momentele de inerţie mecanic axial J_{xx}, al unui tor de rază R şi greutate specifică γ, generat de un cerc de rază r.

R: $J_{xx} = \frac{\pi r}{2g} R \gamma^2 (4R^2 + 3r^2)$

24. Pentru sistemele de puncte materiale din fig. 10.47 săse determine poziţia centrului de masă (CM) şi momentele de inerţie principale centrale, în următoarele cazuri: a) pentru două puncte materiale de mase m_1 şi m_2 situate la distanţa l; b) trei puncte materiale dispuse în vârful

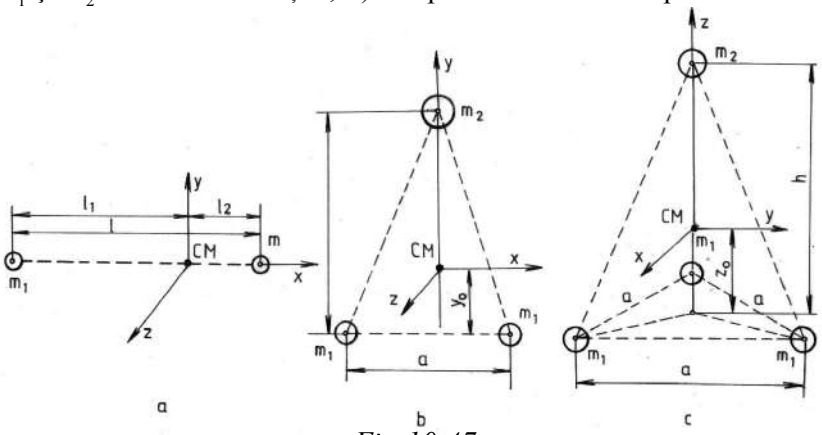


Fig.10.47.

unui triunghi isoscel; c) patru puncte materiale dispuse în vârfurile unei piramide triunghiulare regulate.

Răspuns:

a) $l_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2}$; $l_2 = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$; $J_x = 0$; $J_y = J_z = \dfrac{m_1 m_2 l^2}{m_1 + m_2}$

b) $y_0 = \dfrac{m_2 h}{2m_1 + m_2}$; $J_x = \dfrac{2m_1 m_2 h^2}{2m_1 + m_2}$; $J_y = \dfrac{1}{2} m_1 a^2$; $J_z = J_x + J_y$

c) $z_0 = \dfrac{m_2 h}{3m_1 + m_2}$; $J_x = J_y = \dfrac{1}{2} m_1 a^2 + \dfrac{3m_1 m_2 h^2}{3m_1 + m_2}$; $J_z = m_1 a^2$

25. Un tor de rază R, având greutatea specifică γ, generat de un cerc de rază r, se roteşte în jurul axei Ox cu n ture/min. Să se calculeze energia cinetică a torului.

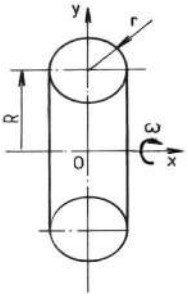


Fig. 10.48.

R: $E = \dfrac{\pi^3 n^2 \gamma}{3600 g} R \cdot r^2 (4R^2 + 3r^2)$

26. Un cub omogen de masă m şi muchie 2a se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe ce corespunde cu o diagonală principală. Să se determine momentul cinetic K_0 al cubului, unde O este un vârf al cubului situat pe axa de rotație.

R: $K_o = \dfrac{2ma^2\omega}{3}$

27. Un cilindru circular drept de masă M, raza bazei R şi înălțime H, se roteşte cu o viteză unghiulară ω în jurul unei axe orizontale ce trece prin centrul de masă C. Axa de simetrie a cilindrului formează unghiul α cu axa de rotație. Să se determine momentul cinetic al cilindrului în raport cu centrul de masă C.

R: $K_c = \dfrac{M\omega}{12}\sqrt{(3R^2 + H^2)\sin^2\alpha + 36R^4\cos^2\alpha}$

28. Să se determine momentul cinetic al barei cotite .

R: $\overline{K}_o = \frac{mb^2\omega}{3}\left(-\frac{1}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{11}{3}\bar{k}\right)$

29. Roata cilindrică de rază r şi greutate G se rostogoleşte fără alunecare în interiorul unei suprafeţe cilindrice fixe de rază R, prin intermediul unei manivele OA de greutate P. Să se calculeze energia cinetică a sistemului de corpuri dacă manivela are viteza unghiulară ω_0 (fig. 10.49).

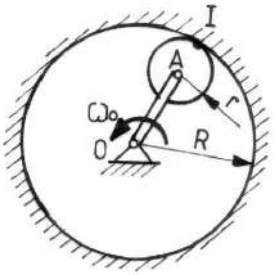


Fig. 10.49

R: $E = \frac{(R-r)^2}{12g}(2P + 9G)\omega_o^2$

30. Un corp punctiform de masă m se mişcă pe o traiectorie circulară de rază R sub acţiunea unei forţe centrale de atracţie $F = -\frac{k}{r^2}$, a cărei direcţie trece prin centrul cercului, iar k = const. Să se calculeze: a) energia cinetică; b) energia potenţială; c) energia totală; d) momentul cinetic al corpului.

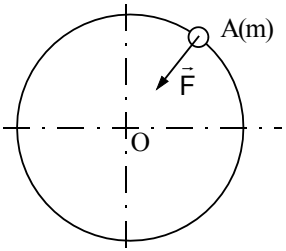


Fig. 10.50

R: $E = \frac{k}{2R}$; $V = -\frac{k}{R}$; $E + V = E_t = -\frac{k}{2R}$; $K_0 = \sqrt{k\,m\,R}$

31. Pentru determinarea masei unui tren de marfă, între locomotivă şi primul vagon s-a intercalat un dinamometru. Într-un interval τ = 2 minute dinamometrul a indicat o forţă medie F = 105 N. În acest timp trenul a atins viteza v = 57,6 km/h, plecând din repaus. Coeficientul de frecare este μ = 0,1. Să se calculeze masa trenului.

R: $m = \frac{F \cdot \tau}{v + \mu g \cdot \tau} = 98{,}5\,t$

11

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE DINAMICII

11.1. Teorema variației energiei cinetice 317
11.1.1. Cazul punctului material 317
11.1.2. Cazul solidului rigid 318
11.1.3. Teorema conservării energiei mecanice 319
11.2. Teorema impulsului 319
11.2.1. Cazul punctului material 319
11.2.2. Cazul solidului rigid 320
11.2.3. Teorema conservării impulsului 320
11.3. Teorema momentului cinetic 321
11.3.1. Cazul punctului material 321

11.3.2. Cazul solidului rigid 321
11.3.3. Teorema conservării momentului cinetic 322
11.4. Probleme rezolvate 323
11.5. Probleme propuse 329

11

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE DINAMICII

11.1. TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE

11.1.1. Cazul punctului material

Teorema variație energiei cinetice stabilește legătura care există între variația energiei cinetice a punctului și lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor active și pasive ce acționează asupra punctului în același interval de timp.

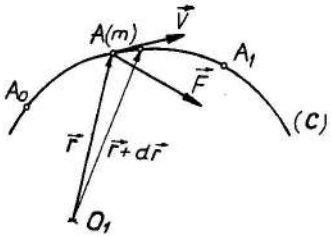


Fig. 11.1

În figura 11.1 se consideră un punct material A de masă m, aflat sub acțiunea unor forțe a căror rezultantă este $\vec{F}$, în mișcare cu viteza $\vec{v}$. Pornind de la ecuația fundamentală a dinamicii

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a},$$

și înmulțind ambii membri cu deplasarea elementară $d\vec{r}$, se obține:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}, \text{ știind că } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}. \text{sau} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

În membrul stâng al egalității recunoaștem lucrul mecanic elementar dL, iar în membrul drept diferențiala expresiei $\left(m\vec{v}^2/2\right)$, adică tocmai diferențiala energiei cinetice; relația devine:

$$dL = dE \qquad (11.1)$$

Relația (11.1) exprimă **teorema variației energiei cinetice sub formă**

diferențială: variația energiei cinetice în intervalul de timp dt este egală cu lucrul mecanic efectuat în acelaşi interval de timp de către rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material.

Dacă se consideră un interval finit de timp Δt, corespunzător unei deplasări finite între pozițiile A_O, inițială şi A_1, finală ale punctului material, vom avea:

$$\int_{E_O}^{E_1} dE = \int_{A_O}^{A_1} dL, \text{sau} E_1 - E_O = L_{O-1}. \qquad (11.2)$$

Relația (11.2) este expresia matematică a teoremei variației energiei cinetice sub **formă finită** al cărei enunț este: variația energiei cinetice a unui punct material într-un interval de timp Δt, este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forțelor ce acționează asupra lui corespunzător deplasării efectuate între cele două poziții, inițială şi finală, în acelaşi interval de timp.

Cu alte cuvinte, pentru ca energia cinetică să crească cu o anumită cantitate, este necesar să se producă un lucru mecanic, echivalent cu această creştere de energie cinetică.

11.1.2. Cazul solidului rigid

Rigidul poate fi asimilat cu un sistem de puncte materiale, nedeformabil, în număr infinit de mare, masa fiecărui punct fiind infinit de mică, astfel că expresia (11.2) se păstrează şi în cazul solidului rigid.

În concluzie, pentru sistemele materiale având legături ideale (nedeformabile şi fără frecare) teorema variației energiei cinetice a sistemului este egală cu lucrul mecanic al forțelor exterioare.

La aplicarea teoremei variației energiei cinetice este indicat a se urmări **etapele următoare:**

-în funcție de mişcările pe care le au corpurile ce formează sistemul, se stabilesc distribuțiile de viteze corespunzătoare pozițiilor inițială şi finală;

-se determină expresiile energiilor cinetice ale sistemului corespunzătoare celor două poziții alese, calculând energia fiecărui corp şi însumând;

-se pun în evidență forțele exterioare şi se calculează lucrul mecanic

total produs de aceste forţe prin deplasarea sistemului între cele două poziţii alese; dacă la momentul iniţial sistemul este în repaus, atunci $E_O = 0$;

-mărimile calculate E_1, E_O şi L_{O-1}^{ext} se introduc în relaţia (11.2) şi se obţine o legătură între pătratul vitezei şi parametrul de poziţie al elementului ales pentru studiul mişcării; se derivează relaţia în raport cu timpul şi se obţine expresia acceleraţiei liniare sau unghiulare a elementului respectiv.

11.1.3. Teorema conservării energiei mecanice

Dacă forţele ce acţionează asupra punctului sau sistemului material sunt conservative şi derivă dintr-o funcţie de forţă U (x, y, z), atunci lucrul mecanic elementar este egal cu diferenţiala funcţiei de forţă, conform (10.8) şi (10.11):

$$dL = dU = -dV .$$

În acest caz teorema variaţiei energiei cinetice (11.1) se scrie:

$$dE = dU = -dV \text{ sau } d(E + V) = 0,$$

rezultă că:

$$E + V = E_m = \text{const.} \qquad (11.3)$$

Relaţia (11.3) exprimă teorema conservării energiei mecanice: "dacă forţele ce acţionează asupra unui sistem material sunt conservative, atunci energia mecanică a sistemului rămâne constantă în tot timpul mişcării (adică se conservă)."

11.2. TEOREMA IMPULSULUI

11.2.1. Cazul punctului material

Fie un punct material de masă m, aflat în mişcare cu viteza $\vec{v}$ sub acţiunea unor forţe a căror rezultantă este $\vec{F}$ (fig. 11.2). Ecuaţia fundamentală a dinamicii $\vec{F} = m\vec{a}$ se poate scrie astfel:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = F. \qquad (11.4)$$

Având în vedere că masa punctului este constantă relaţia (11.4) devine:

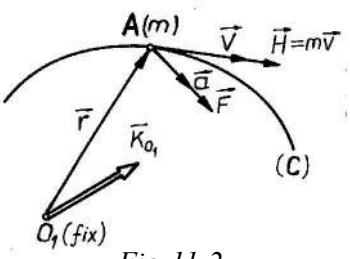


Fig.11.2

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \text{ sau } \dot{\vec{H}} = \vec{F} \qquad (11.6)$$

Relaţia (11.5) exprimă teorema impulsului: "derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta tuturor forţelor (date şi de legătură) ce acţionează asupra acestui punct."

11.2.2. Cazul solidului rigid

Ştiind că rigidul este format dintr-o infinitate de puncte materiale de masă elementară, ce ocupă un domeniu închis din spaţiu, toate modurile de exprimare a teoremei impulsului unui sistem discret de puncte materiale rămân valabile şi în cazul unui solid rigid:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{R}^a + \vec{R}^p, \qquad (11.6)$$

sau $M\vec{a}_c = \vec{R}^a + \vec{R}^p$, unde $\vec{R}^{ext} = \vec{R}^a + \vec{R}^p$, reprezintă rezultanta forţelor exterioare, active şi pasive ce acţionează asupra rigidului.

Aceste ecuaţii vectoriale se pot proiecta pe axele unui sistem cartezian de referinţă, obţinându-se trei ecuaţii scalare:

$$\dot{H}_x = X^a + X^p; \dot{H}_y = Y^a + Y^p; \dot{H}_z = Z^a + Z^p; \qquad (11.7)$$

sau $M\ddot{x}_c = X^a + X^p; M\ddot{y}_c = Y^a + Y^p; M\ddot{z}_c = Z^a + Z^p,$ (11.8)

unde X^a, Y^a, Z^a sunt componentele scalare ale rezultantelor forţelor active, date, iar X^p, Y^p, Z^p sunt componentele scalare ale rezultantei forţelor pasive de legătură.

11.2.3. Teorema conservării impulsului

Dacă rezultanta forţelor exterioare, active şi pasive ce acţionează asupra sistemului material este nulă, atunci impulsul se conservă.

Dacă $\vec{R}^a + \vec{R}^p = 0$ conform relaţiei (11.6) rezultă:

$$\dot{\vec{H}} = 0 \text{ sau } \vec{H} = M\vec{v}_c = \text{const.} \qquad (11.9)$$

Relația (11.9) exprimă teorema conservării impulsului care se enunță astfel:"centrul de masă al sistemului material se mişcă rectiliniu şi uniform, sau îşi păstrează starea de repaus, după cum viteza lui, în momentul când se anulează rezultanta forțelor exterioare este diferită sau egală cu zero."

11.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

11.3.1. Cazul punctului material

Reluând ecuația fundamentală $\vec{F} = m\vec{a}$, şi înmulțind-o vectorial la stânga cu vectorul de poziție în raport cu un punct fix O_1 (fig.11.2) obținem:

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \qquad (11.10)$$

Membrul stâng se poate scrie şi sub forma $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$ dacă se observă că $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = 0$.. Aşadar, relația (11.10) devine:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \text{ , sau}$$

$$\dot{\vec{K}}_{O_1} = \vec{M}_{O_1}, \qquad (11.11)$$

se obține astfel teorema momentului cinetic (11.11) pentru un punct material, care se enunță astfel: "derivata în raport cu timpul a momentului cinetic față de un punct fix O_1, este egală cu momentul forței rezultante care acționează asupra punctului, calculat față de acelaşi pol fix."

11.3.2. Cazul solidului rigid

Toate formele sub care a fost prezentată teorema momentului cinetic, pentru un sistem discret de puncte materiale, se extind la orice sistem material deci şi la un rigid, cu observația că sumele finite se înlocuiesc cu integrale, cu excepția momentului rezultant al sistemului de forțe exterioare.

Față de un pol fix O_1, teorema momentului cinetic (11.11) pentru solidul rigid se poate scrie sub forma:

$$\dot{\vec{K}}_{O_1} = \vec{M}^{a}_{O_1} + \vec{M}^{p}_{O_1}, \tag{11.12}$$

unde $\vec{M}^{a}_{O_1} + \vec{M}^{p}_{O_1} = \vec{M}^{ext}_{O_1}$ reprezintă momentul rezultant al forțelor exterioare, active şi pasive ce acționează asupra rigidului.

Se poate demonstra că teorema momentului cinetic poate fi aplicată şi față de centrul de masă C al sistemului material respectiv, fără ca forma ei să se schimbe:

$$\dot{\vec{K}}_c = \vec{M}^{ext}_c. \tag{11.13}$$

Relația (11.13) exprimă teorema momentului cinetic al rigidului față de centrul de masă: "derivata în raport cu timpul a momentului cinetic în raport cu centrul de masă al unui solid rigid, este egală cu momentul rezultant al forțelor exterioare, active şi pasive, față de acelaşi pol C."

Relația vectorială (11.12) se poate proiecta pe axele unui sistem cartezian de referință cu originea în O_1, obținându-se trei ecuații scalare:

$$\dot{K}_x = M^{a}_x + M^{p}_x; \dot{K}_y = M^{a}_y + M^{p}_y; \dot{K}_z = M^{a}_z + M^{p}_z, \tag{11.14}$$

11.3.3. Teorema conservării momentului cinetic

Dacă momentul rezultant al forțelor exterioare în raport cu un pol fix sau cu centrul de masă este nul, atunci momentul cinetic al sistemului material considerat rămâne neschimbat, adică se conservă.

Deci, dacă $\vec{M}^{ext}_{O_1} = \vec{M}^{a}_{O_1} + \vec{M}^{p}_{O_1} = 0,$, conform relației (11.12) rezultă:

$$\dot{\vec{K}}_{O_1} = 0 \text{ sau } \vec{K}_{O_1} = \text{const}. \tag{11.15}$$

Teorema momentului cinetic față de centrul de masă este:

$$\vec{K}^{rot}_c = \text{const}., \tag{11.16}$$

adică, momentul cinetic este egal cu un vector constant.

11.4. PROBLEME REZOLVATE

1. Un cilindru şi o sferă de aceeaşi masă M şi aceeaşi rază R (fig.11.3), se rostogoleşte fără alunecare pe un plan înclinat de unghi a. Aplicând teorema variaţiei energiei cinetice să se determine raportul acceleraţiilor centrelor de masă, cunoscând coeficientul de frecare de rostogolire s.

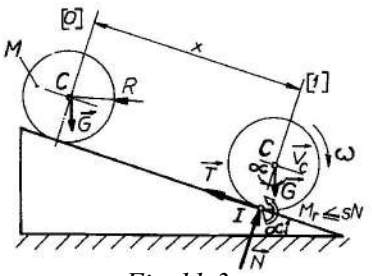


Fig.11.3

Rezolvare. Se aleg cele două poziţii iniţială [0] şi finală [1]. În poziţia iniţială $E_O = 0$. În poziţia finală, faţă de centrul de masă, corpul are o energie de translaţie şi o energie cinetică de rotaţie.

$$E_1 = E_1^{tr} + E_1^{rot} = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2.$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare efectuat în timpul deplasării corpului de rotaţie, între cele două poziţii este:

$$L_{O-1} = G\sin\alpha \cdot x - \frac{s}{R}G\cos\alpha \cdot x.$$

Înlocuind în (13.5) expresiile energiei şi lucrului mecanic, rezultă:

$$\frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = Gx\left(\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha\right).$$

Faţă de centrul instantaneu de rotaţie I, avem $\omega = \frac{v_c}{R}$.

Deci $v_c^2 = \frac{2Mg\left(\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha\right)x}{M + J_\Delta / R^2}$.

Derivând în raport cu timpul şi ţinând cont că $dx/dt = v_c$, rezultă:

$$a_c = \frac{\left(\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha\right)}{1 + J_\Delta / MR^2} g.$$

Pentru cilindru $J_\Delta^c = \frac{1}{2}MR^2$, iar pentru sferă $J_\Delta^s = \frac{2}{5}MR^2$.

Raportul accelerațiilor centrelor de masă este:

$$k = \frac{a_c^c}{a_c^s} = \frac{1 + J_\Delta^s / MR^2}{1 + J_\Delta^c / MR^2} = \frac{14}{15}.$$

2. Un transportor cu bandă (fig.11.4) este antrenat de un motor electric printr-un cuplu de moment M_O. Să se calculeze accelerația unei piese turnate de greutate P aşezată pe bandă. Rolele de antrenare şi susținere au aceeaşi rază R şi greutate G.

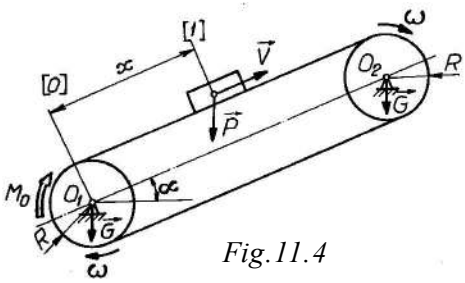


Fig.11.4

Rezolvare. Pentru calculul accelerației se determină mai întâi viteza la pătrat aplicând teorema energiei, după care se derivează relația obținută. Pentru aceasta se consideră sistemul inițial în repaus $E_O = 0$. La un moment dat, piesa are viteza v, iar rolele w = v/R.

Energia cinetică a sistemului într-o poziție oarecare, finită este:

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + 2\frac{1}{2}\frac{GR^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}(P + G).$$

Dacă se consideră deplasarea piesei între cele două poziții x, rolele s-au rotit cu unghiul q = x/R.

Considerând piesa fixată pe bandă, lucrul mecanic total este:

$$L_{O-1} = M_O\theta - P \cdot x \cdot \sin\alpha = \left(\frac{M_O}{R} - P \cdot \sin\alpha\right)x.$$

Aplicând teorema variației energiei cinetice rezultă:

$$\frac{v^2}{2g}(P+G)=\left(\frac{M_O}{R}-P\sin\alpha\right)x,$$

şi derivând în raport cu timpul, rezultă accelerația piesei:

$$a=\frac{(M_O-PR\sin\alpha)}{R(P+G)}g.$$

3. În capătul D al unui fir inextensibil, înfăşurat pe discul A de rază r, acționează o forță $\vec{P}$ sub unghiul a, față de orizontală. Discul A de rază r, este solidar cu discul B de rază R = 2r, care se rostogoleşte pe un plan orizontal (fig.11.5). Întregul ansamblu are masa m = P/g şi raza de inerție $i=\sqrt{R\cdot r}$.

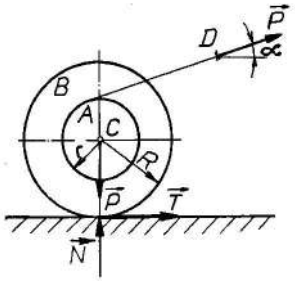


Fig.11.5

Să se determine unghiul a maxim pentru care corpul se rostogoleşte fără patinare şi accelerația centrului de masă al discului corespunzătoare acestui unghi maxim dacă coeficientul de frecare la alunecare este m = 0,1.

Rezolvare. Se reprezintă toate forțele active şi pasive ce acționează asupra discului. Discul are o mişcare plan-paralelă. Se aplică teorema impulsului (două ecuații scalare) şi teorema momentului cinetic (o ecuație scalară) în raport cu axa ce trece prin centrul de masă:

$$m\ddot{x}_C=T+P\cos\alpha; \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C=N-P+P\sin\alpha=0; \qquad (2)$$

$$J_C\dot{\omega}=r\cdot P-R\cdot T; \qquad (3)$$

La aceste ecuații se adaugă relațiile: T=mN; $a_C=2r\cdot\varepsilon$; $J_C=mi^2=\frac{P}{g}Rr$. Din relația (2) rezultă N=P(1-sinα), care înlocuită în (1) dă:

$$\ddot{x}_C = a_C = (\mu - \mu\sin\alpha + \cos\alpha)g. \qquad (4)$$

Făcând toate înlocuirile în (3) rezultă condiția de echilibru la limită:

$$\frac{R}{g}\cdot Rr\cdot\frac{(\mu-\mu\sin\alpha+\cos\alpha)g}{2r} = rP - \mu RP(1-\sin\alpha),$$

sau $3\mu(1-\sin\alpha) = 1-\cos\alpha.$ (5)

În ecuația trigonometrică (5) se înlocuiesc:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \text{ și } \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ unde } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$ și rezultă

$$\frac{3\mu}{2} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2$$

de unde $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{2/3\mu}} = 0{,}279.$

Deci $\alpha_{max} = 2\operatorname{arctg}0{,}279 = 31^\circ 12'.$

Accelerația centrului de masă

$$a_C = (0{,}1 - 0{,}1\sin\alpha_{max} + \cos\alpha_{max})g = 8{,}85 m/s^2.$$

4. Un disc de masă m=70kg și rază R=1m (fig.11.6) este accelerat timp de 2 minute din poziția de repaus, până la o turație n=240 rot/min. Frecarea în axul discului este dată prin coeficientul $\mu_O = 0{,}1$, iar raza axului este r_O =0,1 m. Să se determine: a) momentul cuplului ce trebuie aplicat roții pentru a obține această accelerație; b) îndepărtând cuplul, în cât timp și după câte rotații se va opri discul.

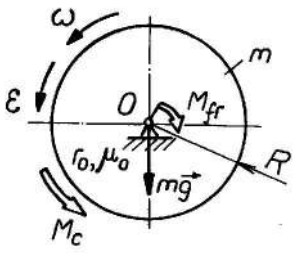


Fig.11.6

Rezolvare. a) Accelerația unghiulară a discului este:

$$\varepsilon = \frac{\omega_O}{t} = \frac{\pi n}{30t} = \frac{\pi\cdot 240}{30\cdot 2\cdot 60} = \frac{\pi}{15} rad/s^2.$$

Teorema momentului cinetic față de axa de rotație conduce la: $J_O\varepsilon = M_C - M_{fr}$, de unde rezultă momentul cuplului:

$$M_C = J_O\varepsilon + M_{fr} = \frac{mR^2}{2}\varepsilon + \mu_O r_O mg = \frac{70\cdot 1^2}{2}\frac{\pi}{15} +$$
$$+ 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 70\cdot 9{,}81 = 14{,}19\text{Nm}.$$

b) Pentru a afla timpul în care discul se oprește, după îndepărtarea cuplului, se aplică teorema variației momentului cinetic, scrisă sub forma:

$J_O(\omega_1 - \omega_O) = -M_{fr}\cdot t_f$ unde $\omega_1 = 0$, deci

$$t_f = \frac{J_O\omega_O}{M_{fr}} = \frac{R^2\pi n}{60\mu_O r_O g} = \frac{1^2\cdot 3{,}14\cdot 240}{60\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 9{,}8} = 128{,}16\,\text{sec}.$$

Legea spațiului unghiular este:

$\theta = \frac{\varepsilon t_f^2}{2} = 2\pi N$, de unde rezultă numărul de rotații:

$$N = \frac{\varepsilon t_f^2}{4\pi} = \frac{\pi}{15}\cdot\frac{128{,}16^2}{4\pi} = 273{,}74 \text{ rotații}.$$

5. Corpul A de masă m_1=60 kg este suspendat prin intermediul unui fir inextensibil trecut peste scripetele B de masă m_2=6 kg şi înfăşurat pe tamburul D a ruloului E, care se poate rostogoli fără alunecare pe două şine paralele, înclinate față de orizontală cu unghiul $\alpha = 30^\circ$. Tamburul D de rază R = 0,4 m este legat rigid de ruloul E de rază r = 0,2 m, masa lor comună fiind egală cu m_2 = 100 kg, iar raza de inerție în raport cu axa ruloului i = 0,3 m. Neglijând frecarea la rostogolire, frecarea în axul scripetelui şi masa firului să se determine: a) accelerația corpului A; b) viteza corpului A după ce a coborât pe înălțime cu s = 1 m, ştiind că la momentul inițial sistemul s-a aflat în repaus; c) eforturile din fir; d) coeficientul de frecare de alunecare minim astfel încât tamburul D şi ruloul E să se rostogolească fără alunecare (fig.11.7).

Rezolvare. a) Se izolează corpurile, înlocuind legăturile interioare cu reacțiunile corespunzătoare. Se reprezintă vitezele liniare şi unghiulare ale fiecărui corp. Aplicând teorema impulsului (11.16) şi teorema momentului cinetic (11.20) celor trei corpuri ale sistemului rezultă ecuațiile scalare:

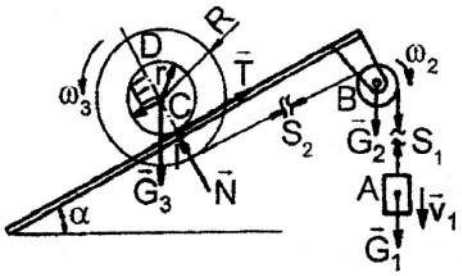


Fig. 11.7

$$m_1\dot{v}_1 = m_1 g - s_1;\ \text{pentru corpul A;} \qquad (1)$$

$$J_2\dot{\omega}_2 = s_1 r_2 - s_2 r_2;\ \text{pentru scripetele B;} \qquad (2)$$

$$m_3\dot{v}_3 = m_3 g\sin\alpha - T - s_2;\ \text{pentru tamburul D şi ruloul E;} \qquad (3)$$

$$0 = N - m_3 g\cos\alpha; \quad (4)$$

$$J_3\dot{\omega}_3 = rT + Rs_2; \quad (5)$$

La aceste ecuații se adaugă relațiile:

$$v_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3(R-r); v_3 = \omega_3 r; J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}; J_3 = m_3 i^2,$$

sau, prin derivare rezultă:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \varepsilon_3 = \frac{a_1}{(R-r)}; a_3 = \frac{a_1 r}{(R-r)}. \qquad (6)$$

Eliminând s_1, s_2 şi T din ecuațiile (1)...(5) şi ținând cont de (6) rezultă o ecuație având ca necunoscută a_1.

$$a_1 = \frac{m_1(R-r)^2 + m_3 r(R-r)\sin\alpha}{(m_1 + 0{,}5m_2)(R-r)^2 + m_3(i^2 + r^2)} g = 2{,}778\,m/s^2.$$

b) Legile de mişcare ale corpului A sunt:

$$a_1 = 2{,}778(m/s^2);\ v_1 = 2{,}778t;\ s_1 = 2{,}778\frac{t^2}{2}.$$

Eliminând timpul între $v_1(t)$ şi $s_1(t)$ rezultă:

$v_1 = \sqrt{2 \cdot a_1 s_1} = \sqrt{2 \cdot 2{,}778 \cdot 1} = 2{,}35 \text{m/s}^2.$

c) Eforturile din fir sunt:

$s_1 = m_1(g - a_1) = 60(9{,}81 - 2{,}77) = 422{,}40\text{N}.$

Înlocuind s_1 în relația (2) rezultă: $s_1 - s_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{a_1}{r_2} \cdot \frac{1}{r_2}$; deci

$$s_2 = s_1 - \frac{m_2 a_1}{2} = 422{,}4 - \frac{6 \cdot 2{,}778}{2} = 414{,}06\text{N}.$$

d) Coeficientul minim de frecare de alunecare se determină din ecuația (3) ştiind că la limită T = mN:

$$\mu_{min} \cdot m_3 g \cdot \cos\alpha = m_3 g \cdot \sin\alpha - s_2 - m_3 a_3;$$

$$\mu_{min} = \text{tg}\alpha - \frac{s_2 + m_3 a_1 r/(R - r)}{m_3 g \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \text{tg}30^\circ - \frac{414{,}06 + 100 \cdot 2{,}778 \cdot 0{,}2/0{,}2}{100 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30^\circ} = 0{,}233.$$

11.5. PROBLEME PROPUSE

1. Peste scripetele a cărui greutate proprie se neglijează (fig. 11.8) este trecut un fir de care sunt prinse greutățile G şi P. Se cere greutatea P pentru ca:

a) în două secunde de la pornirea din repaus, sistemul să aibă viteza v = 6 m/s;

b) după nouă metri de la pornire, din repaus, sistemul să aibă viteza v = 6 m/s.

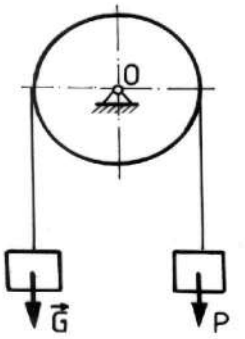


Fig. 11.8.

R: a) $P = G\frac{g \pm 3}{g \mp 3}$ b) $P = G\frac{g \pm 2}{g \mp 2}$

2. O greutate G = 20 N trebuie împărțită în două părți G_1 și G_2, astfel încât prinse de cele două capete ale unui fir care trece peste un scripete fără greutate proprie, sistemul parcurge 4m în primele două secunde de la pornire din repaus. Aceiași problemă pe un plan înclinat (fig. 11.9 b) de unghi α și coeficientul de frecare μ.

R: a) $G_1 = 8N$; $G_2 = 12N$.

b) $G_1 = 8{,}42$ N; $G_2 = 11{,}58$ N.

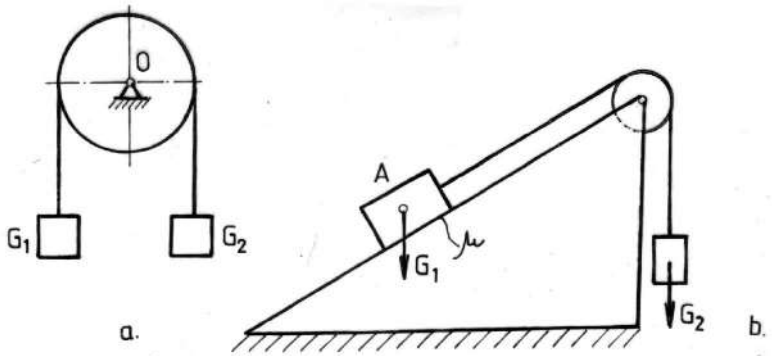


Fig. 11.9

3. Un corp de greutate G, alunecă din B pe un plan înclinat de unghi α și coeficient de frecare μ (AB = l). În A se înscrie pe un cerc de rază R, pe care alunecă fără frecare. Se cere raza cercului pentru ca acest corp să ajungă în D (fig. 11.10).

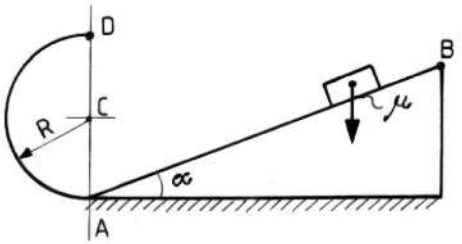


Fig. 11.10

R: $R = l/2\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

4. Considerând greutatea scripeților neglijabilă, să se determine viteza greutății G, după ce a coborât s metri. Coeficientul de frecare între plan și greutatea P este μ (Fig. 11.11).

R: $v = 2\sqrt{gs\dfrac{2G-\mu P}{4G+P}}$

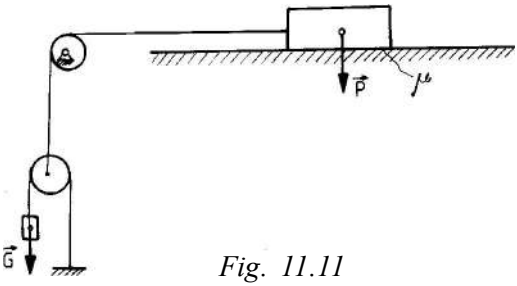


Fig. 11.11

5. O locomotivă de masă M trage un vagon de masă m, cu viteza constantă v_0, în momentul în care se desprinde vagonul. După ce locomotiva a mai parcurs distanța d, i se taie forța de tracțiune, urmând să se oprească datorită frecării de coeficientul μ.

Să se determine timpul între oprirea vagonului şi cea a locomotivei dacă v_0 = 72 km/h, μ = 0,5, M = 4m şi d = 50 m.

R: t = 20 s.

6. O bicicletă coboară o pantă sub unghiul α (sin α = 0,1) cu 18 Km/h. Pe ce distanță minimă poate fi frânată, frânarea făcându-se numai la roata din față? Ce valoare are coeficientul μ de frecare în acest caz (fig. 11.12). Se dau: AC' = d = 0,6 m; CC' = h = 0,8 m.

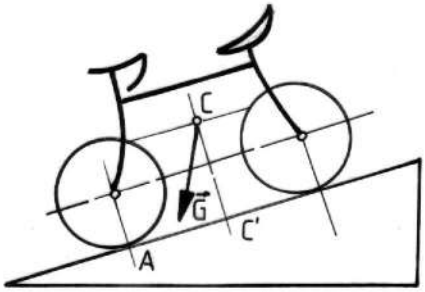


Fig. 11.12

R: s = 3,58 m; μ = 0,85

7. Un corp de masă m = 2 kg (fig. 11.13) este lăsat liber de la înălțimea H = 4,5 m, să alunece într-un jgheab de formă oarecare, după care se înscrie pe o suprafață cilindrică de rază R = 2 m. Să se determine forța cu care corpul apasă pe suprafața cilindrică în punctul B, dacă lucrul mecanic al

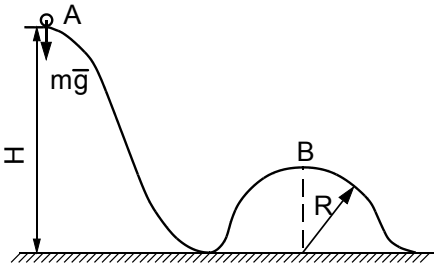


Fig. 11.13

forței de frecare pe întrgul traseu este L' = 40 J. Se consideră g = 10 m/s.

R:

$$N = \left(3 - 2\frac{H}{R}\right)mg + 2\frac{L}{R} = 10 \text{ N}$$

8. Un automobil cu masa m = 200 kg, îşi sporeşte viteza în 10 sec., de la v_1 = 36 Km/h până la v_2 = 54 Km/h. Să se determine surplusul de putere necesar.

R: P = 5 KW

9. Doi cilindri (fig. 11.14, 11.15) de masă m şi rază R, unul gol şi altul plin, se rostogolesc fără alunecare pe un plan înclinat aspru, de unghi α. Să se determine raportul acceleraţiilor centrelor de masă, ştiind că pleacă de la acelaşi nivel.

R: $a_{G_p} = \frac{4}{3} a_{G_g}$

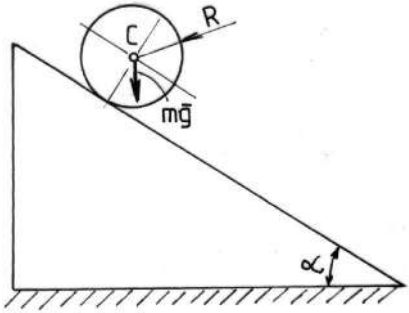


Fig. 11.14

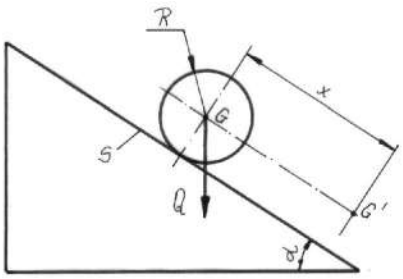


Fig. 11.15

10. Să se determine viteza şi acceleraţia centrului de masă al unui corp de revoluţie de masă m şi rază R, ce se rostogoleşte fără alunecare pe un plan înclinat de unghi α. Coeficientul de frecare la rostogolire este s, iar ψ, unghiul de frecare la rostogolire. Se înlocuieşte masa redusă

$m_r = J/R^2$ şi $\operatorname{tg}\psi = s/R$.

R: $$V_G^2 = \frac{2m}{m+m_r}\cdot\frac{\sin(\alpha-\psi)}{\cos\psi}g\cdot x$$

$$a_G = \frac{m}{m+m_r}\cdot\frac{\sin(\alpha-\psi)}{\cos\psi}g = kg\text{, unde } k<1.$$

11. Un fir inextensibil este legat cu un capăt de un corp A de greutate Q şi cu celălalt capăt de o greutate P şi o greutate suplimentară P/2. Firul este trecut peste un scripete C considerat fără frecare şi de masă neglijabilă. După parcurgerea spaţiului S_1, greutatea P/2 întâlneşte inelul D care o opreşte. După parcurgerea spaţiului S_2 greutatea P se opreşte (fig. 11.16).

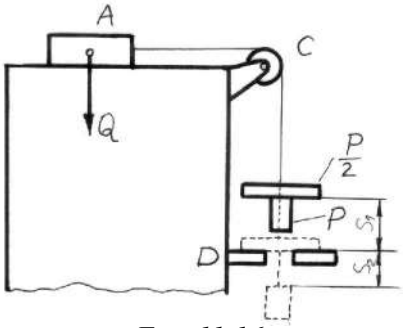


Fig. 11.16

Se cere să se determine coeficientul de frecare de alunecare μ dintre corpul A şi planul orizontal aspru cu ajutorul teoremei energiei cinetice şi lucrului mecanic.

R: $$\mu = \frac{S_1\frac{3P}{2}(P+Q)+S_2P\left(\frac{3P}{2}+Q\right)}{Q\left[S_1(P+Q)+S_2\left(\frac{3P}{2}+Q\right)\right]}$$

12. O greutate P este ataşată de un fir trecut peste un cilindru de aceeaşi greutate P şi de rază r. Cilindrul se rostogoleşte fără alunecare pe o suprafaţă orizontală plană. Se cere să se determine viteza şi acceleraţia

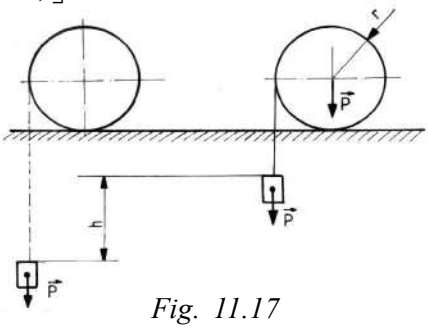


Fig. 11.17

centrului cilindrului după ce greutatea s-a deplasat pe verticală cu distanța h (fig. 11.17).

R: $v = \sqrt{\frac{4}{5}gh}$; $a = \frac{2}{5}g$

13. Un bloc glisant A (fig. 11.18), de greutate G = 1000 N este în legătură, printr-un sistem de scripeți cu o sarcină P = 400 N, conform schemei mecanice din schiță. Cunoscând că sistemul este lansat din repaus şi neglijând frecarea, să se determine: a) viteza blocului glisant A după 5 sec; b) distanța parcursă de blocul A atunci când viteza sa atinge valoarea 5 m/s.

R: a) v = 2,13 m/s

b) h = 29,3 m

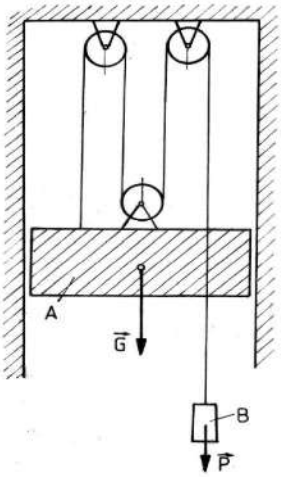


Fig.11.18

14. O uşă glisantă de greutate G = 100 N care se deplasează pe o şină orizontală cu ajutorul rolelor B şi C, se deschide cu ajutorul unei contra greutăți A de greutate P = 75 N, ca în figura 11.19. Se cere să se determine viteza contragreutății A în momentul când aceasta atinge solul, dacă sistemul inițial se găsea în repaus şi dacă se neglijează frecările.

R: $v = 2\sqrt{\frac{Pgh}{G+2P}} = 3{,}76 \text{ m/s}$

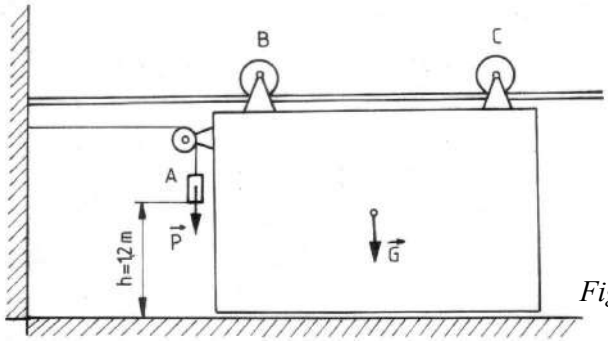


Fig. 11.19

15. Se dă sistemul de corpuri din figura 11.20, acționat de un cuplu de moment M_0. Să se calculeze accelerația corpului G.

R: $a = \dfrac{4g(M_0 - GR)}{9GR}$

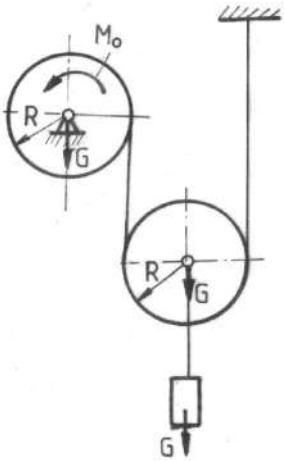


Fig. 11.20

16. Un transportor cu bandă este antrenat de un motor electric, printr-un cuplu de moment M_0. Să se calculeze accelerația unei cărămizi de greutate P, considerând-o fixă pe bandă (fig.11.21).

R: $a = \dfrac{g(M_0 - PR\sin\theta)}{R(P+G)}$

17. Se dă sistemul de corpuri omogene din figura 11.22, care porneşte din repaus sub acțiunea greutăților proprii. Discul de pe planul orizontal se rostogoleşte fără alunecare, coeficientul de frecare la rostogolire este s. Să se calculeze accelerația corpului de greutate $\vec{P}$.

R: $a = \dfrac{2g(PR - sQ)}{R(2P + G + 3Q)}$

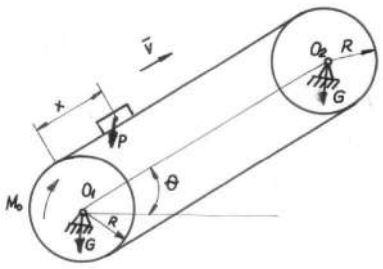


Fig. 11.21

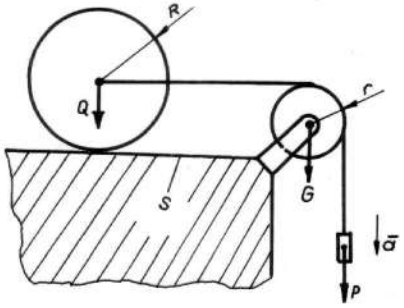


Fig. 11.22

18. Se dă bara OA = l omogenă de greutate G acționată de o greutate Q prin intermediul unui fir fără greutate trecut în B peste un scripete mic (OA=OB). Să se calculeze viteza unghiulară a barei în momentul în care trece prin poziția orizontală, ştiind că bara era inițial în repaus la $\theta = 60^o$ (fig. 11.23).

R: $\omega = \sqrt{\dfrac{3g[G - 4Q(\sqrt{2} - 1)]}{l(2G + 3Q)}}$

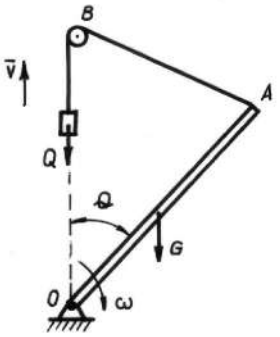


Fig. 11.23

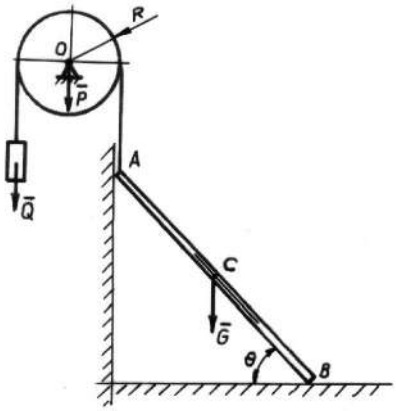


Fig. 11.24

19. Se dă sistemul de corpuri omogene din figura 11.24, alcătuit din bara AB = l de gerutate G, discul de greutate P şi rază R şi corpul de greutate Q. Să se calculeze viteza greutății Q pentru o poziție q a barei, considerându-se că sistemul porneşte din repaus la $q = q_0$.

R: $v = \sqrt{\dfrac{gl(\sin\theta - \sin\theta_0)(2Q - G)}{Q + \dfrac{P}{2} + \dfrac{G}{3\cos^2\theta}}}$

20. Se dă sistemul de corpuri din figura 11.25 care se mişcă în sensul indicat de figură, având la momentul inițial energia cinetică cunoscută E_0. În acest moment se taie cureaua de transmisie. Să se calculeze drumul

parcurs de greutatea 2G până la oprire, timpul corespunzător şi accelerația în mişcarea de coborâre.

Momentul de inerție axial al troliului este $J_1 = \frac{9GR^2}{2g}$.

$$t_{op} = \frac{13}{4}\sqrt{\frac{4E_0}{17gG}};$$

R $x_1 = \frac{13E_0}{34G}$; $a = -\frac{4g}{13}$

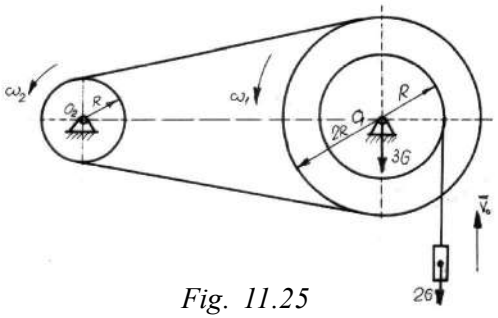


Fig. 11.25

21. Se consideră un arbore gol la interior, având razele R şi r şi lungimea l. Greutatea specifică a materialului arborelui este γ. Să se determine viteza unghiulară inițială care terebuie imprimată arborelui pentru ca greutatea G să se ridice la înălțimea h (fig. 11.26).

R: $\omega_0^2 = \frac{4gG \cdot h}{\pi \cdot \gamma \cdot l(R^4 - r^4) + 2GR^2}$

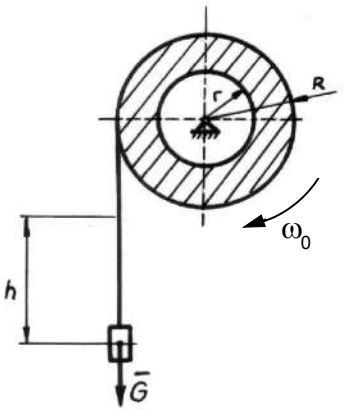


Fig. 11.26

22. O bară de greutate G şi lungime l este lansată în plan vertical cu ω_0, sub un unghi de 30^o (fig. 11.27). Să se determine:

a) după ce unghi viteza este $\omega_0/2$. Ce valoare are accelerația unghiulară ε;

b) se presupune că bara se mişcă în plan orizontal cu frecarea μ, sub ce unghi de la pornire viteza unghiulară este $\omega_0/2$ şi cât este ε în acest caz.

R: a) $\varepsilon = \frac{3g}{2l}\cos\varphi$; $30^0 \le \varphi \le \theta$

b) $\theta = \frac{l\omega^2}{4g\mu}; \varepsilon = -\frac{3g\mu}{2l}$

23. O bară de greutate G şi lungime l are lipit la capăt un disc de greutate G/2 şi rază l/3. Sistemul este articulat în O şi cade din poziţia orizontală în poziţia marcată cu unghiul θ. Să se determine acceleraţia unghiulară în această poziţie (Fig. 11.28).

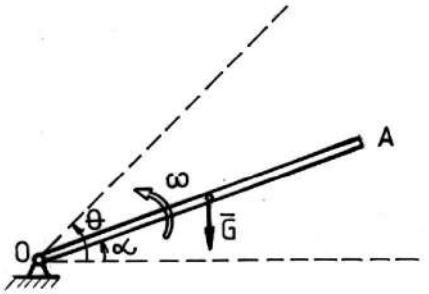


Fig. 11.27

R: $\varepsilon = \frac{14g}{15l}\cos\theta$

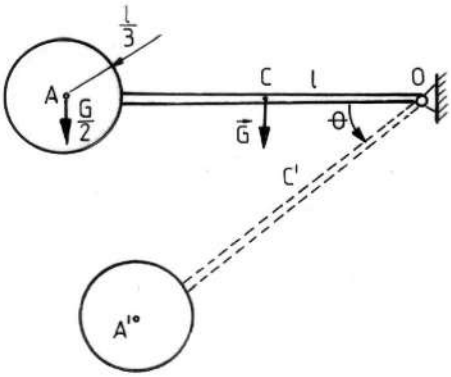


Fig. 11.28

24. Glisorul A de masă M (fig. 11.29), care are posibilitatea să se mişte în ghidajul orizontal, este legat cu un romb BCOD, format din patru bare de aceiaşi lungime l şi masă m fiecare. Arcul de constantă k este fixat între vârfurile C şi D ale rombului. Mecanismul se află în repaus, iar arcul CD, nesolicitat când unghiul CAD este 90°. Ce viteză iniţială v_0 trebuie să i se imprime glisorului, pentru ca vârful rombului B să se deplaseze în B', dacă BO = 2 B'O. Se neglijează frecările în articulaţii şi ghidaje.

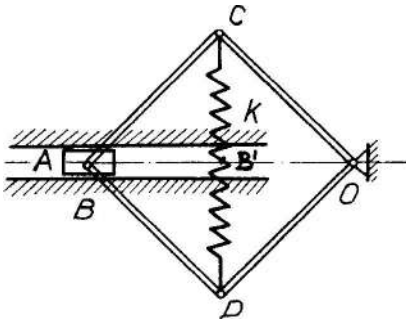


Fig. 11.29

R: $v_0^2 = 0{,}625\frac{kl^2}{3M+5m}$

25. Închizătorul OA (fig.11.30) sub formă unei plăci dreptunghiulare omogene de masă m, are posibilitatea de a se roti în jurul unei axe orizontale ce trece prin O. Închizătorul este legat cu un cablu trecut peste scripeţii B şi C iar în capătul opus este fixată contragreutatea D de masă m_1. Închizătorul se menţine în poziţie orizontală prin intermediul elementului E. Ştiind că OA = OB = l, să se determine viteza unghiulară $\omega = \omega(\varphi)$ a închizătorului după înlăturarea fixatorului E. La ce valoare m_1 viteza unghiulară a închizătorului în poziţia inferioară va fi de două ori mai mică în comparaţie cu cazul absenţei contragreutăţii D.

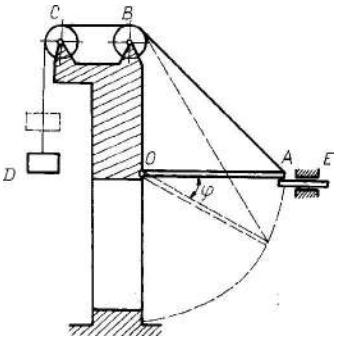


Fig. 11.30

R: $$\omega^2 = \frac{6g}{l} \cdot \frac{m\sin\varphi - 2\sqrt{2}\, m_1 \left(\sqrt{1+\sin\varphi} - 1\right)}{2m + 3m_1(1-\sin\varphi)}$$

$$m_1 = \frac{3m}{8(2-\sqrt{2})} = 0{,}64\, m$$

26. Într-un tub vertical este montat un resort cu constanta de elasticitate k (fig. 11.31). În capătul superior este aşezat un piston mobil cu masă M, iar pe piston se aşează o bilă de masă m. Resortul se menţine în stare comprimată de lungime L, de un zăvor. La ce înălţime va sări bila dacă eliberăm resortul, prin înlăturarea zăvorului. Lungimea resortului nedeformat este L_0. Se neglijează frecările.

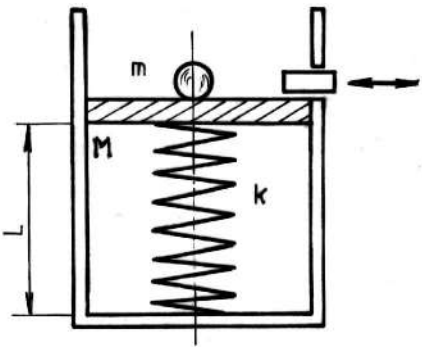


Fig. 11.31

R: $$h = \frac{k(L_0 - L)^2}{2g(m+M)}$$

27. Troliul din figura 11.32, de greutate G şi rază R = 2r şi r, este legat de corpul de greutate G, înălţime 4r, printr-un fir paralel cu planul înclinat. Se dau frecările $\mu_1 = \frac{1}{4}$ şi $\mu_2 = \frac{3}{4}$.

Să se determine tensiunea din fir T, corpurile fiind în mişcare şi lăţimea corpului de înălţime 4r, pentru a fi la limita răsturnării (BC = r).

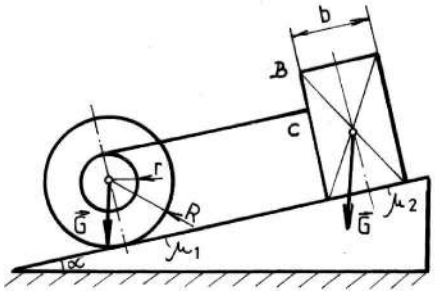


Fig. 11.32

R: $T = \frac{5G}{24}\sin\alpha;\ b = \frac{41}{24}r$

28. Un cub de greutate G şi latură l = 2R şi un cilindru de greutate G şi rază R sunt situate pe un plan înclinat de unghi α (figura 11.33). Între cub şi plan există frecarea μ_1. Se cere coeficientul de frecare μ_2 între cilindru şi plan pentru ca cilindrul să nu alunece în mişcare. Se vor determina condiţiile ca corpurile să rămână în contact în timpul mişcării.

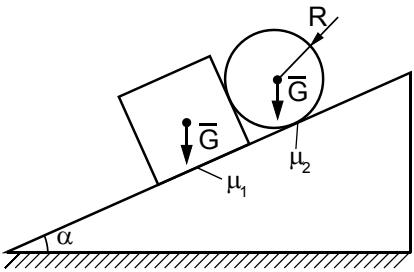


Fig. 11.33

R: $\mu_2 = \frac{2}{5}\mathrm{tg}\alpha - \frac{\mu_1}{5}$

$$\mu_1 > \frac{1}{3}\mathrm{tg}\alpha;\ \mu_2 > \mu_1;\ \mu_2 < \frac{1}{15}\mathrm{tg}\alpha$$

29. Roata de greutate G şi rază R este legată printr-o bară fără greutate proprie la jumătatea laturii unui cub de greutate G şi latură l = 2R.

Ştiind că între plan şi cub nu există frecare, să se determine tensiunea în bară şi frecarea pentru ca roata să nu alunece.

R: $T = -\frac{G}{5}\sin\alpha;\ \mu = \frac{2}{5}tg\alpha$

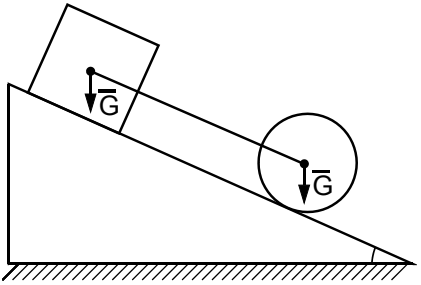


Fig. 11.34

30. Două corpuri sunt prinse de capetele unui fir inextensibil, aşa cum se indică în figura 11.35 Primul corp se află pe o suprafaţă cu asperităţi, iar al doilea atârnă de fir. Dacă se imprimă sistemului o anumită viteză, astfel încât corpul 1 să se deplaseze spre dreapta, sistemul parcurge distanţa h_1. Dacă se imprimă sistemului aceiaşi viteză, orientată spre stânga, aceasta parcurge distanţa h_2. Determinaţi coeficientul de frecare. Se cunoaşte raportul n = m_1/m_2.

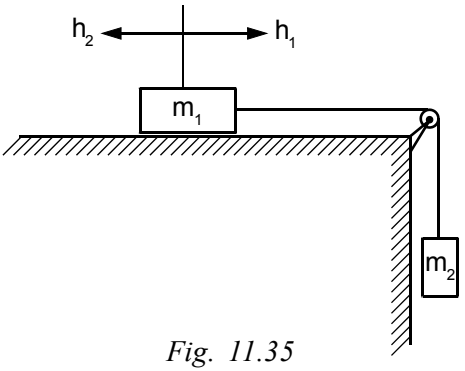


Fig. 11.35

R: $\mu = \frac{h_1 + h_2}{n(h_1 - h_2)}$

31. Să se determine momentul motor M_m, necesar demarării sistemului de corpuri din figura 11.36, cu acceleraţia unghiulară ε_1. Se cunosc razele troliului 2, r_2 şi R_2, a roţii 1, r_1 şi momentele de inerţie mecanice J_1 şi J_2.

R: $M_m = J_{red} \cdot \varepsilon_1 + \frac{r_1 r_2}{R_2} Q$, unde momentul de inerţie redus al sistemului de corpuri este:

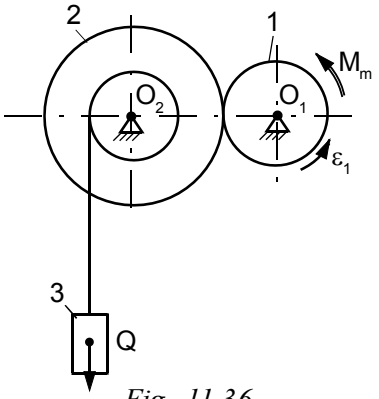


Fig. 11.36

$$J_{red} = J_1 + J_2\left(\frac{r_1}{R_2}\right)^2 + \frac{Q}{g}\left(\frac{r_1 r_2}{R_2}\right)^2$$

32. Dintr-o placă pătrată de greutate 4G şi latură 2*l* se taie o porţiune pătrată de greutate G şi latură *l*, apoi se suspendă cu ajutorul unui resort. Resortul are constanta elastică K = 4G/*l*. Pentru poziţiile de echilibru

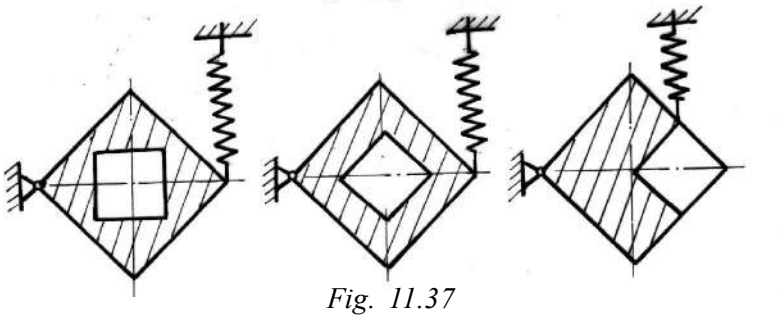


Fig. 11.37

static din figura 11.37 să se determine perioada micilor oscilaţii.

R: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$; b,c) $T = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{17l}{g}}$

33. Fie o placă pătrată articulată în A de greutate G şi latură *l*, de care este lipită o bară de greutate G şi lungime *l*. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale sistemului susţinut de un resort, a cărei constantă elastică este k = 4G/*l*.

R: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{4g}}$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$; c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{4g}}$; d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$; e) $T = 2\pi\sqrt{\frac{11l}{4g}}$; f,g,h) $T = 2\pi\sqrt{\frac{11l}{16g}}$

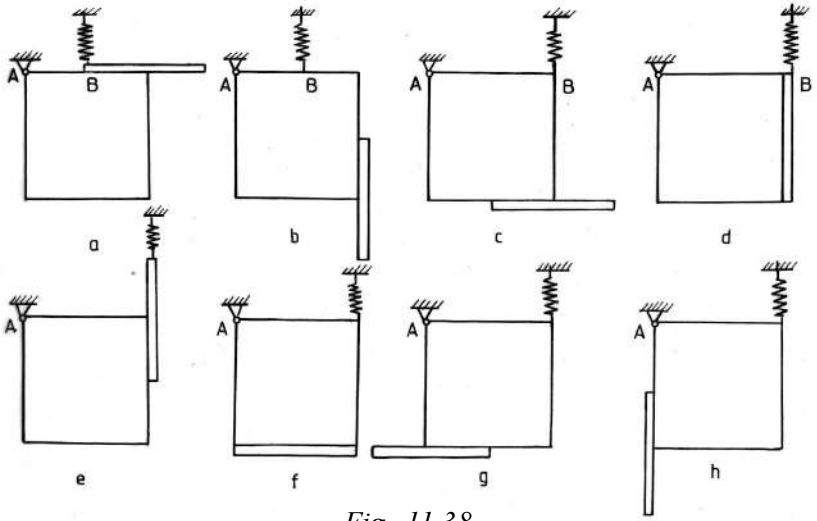


Fig. 11.38

34. Trei bare egale de lungime l şi greutate G (fig. 11.39), fiecare sunt articulate formând un triunghi echilateral. Să se determine perioada micilor oscilaţii în jurul artuculaţiei o, axa fiind perpendiculară pe planul figurii şi în jurul axei (Δ) lungimea pendulului matematic, sincron cu pendulul fizic astfel format.

Presupunând că se scoate bara AB. Să se determine viteza unghiulară ω_0, cu care trebuie rotit sistemul în jurul unei axe, pentru ca barele OA şi OB să rămână la 60^o între ele.

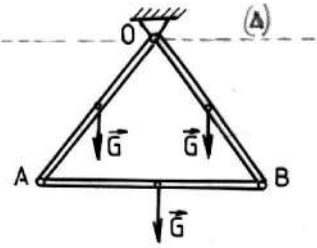


Fig. 11.39

R: a) $l_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} l;\ l_0^{'} = \frac{\sqrt{3}}{4} l$ b) $\omega_0^2 = \sqrt{3}\frac{g}{l}$

35. Două bare de aceiaşi lungime l şi greutate G, sunt sudate între ele formând unghiul de 60^o. Ele oscilează în jurul articulaţiei O. Să se determine perioada micilor oscilaţii.

Bara AO se prinde cu un resort, de constantă k = 4G/*l*, în poziție orizontală. Unde trebuie prins resortul, pentru ca perioada micilor oscilații să fie ca în cazul anterior. Dar dacă unghiul dintre ele este obtuz, de 120°?

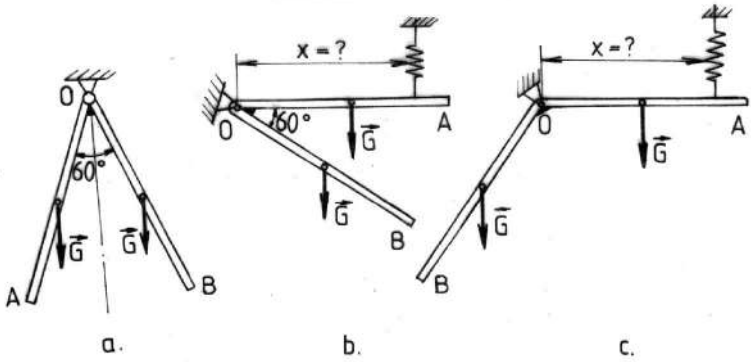


Fig. 11.40

R: a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4 \cdot l\sqrt{3}}{3g}}$

b) $x = 0{,}465 \cdot l$; c) $x' = 0{,}356 \cdot l$

36. Bara cotită sub un unghi drept (figura 11.41) are AB de lungime *l* şi greutate G, şi AC de lungime 2*l* şi greutate 2G. În punctul C un resort susține bara. Acest resort suspendat vertical cu greutatea G la capăt se alungeşte cu *l*/4. Să se determine perioada micilor oscilații.

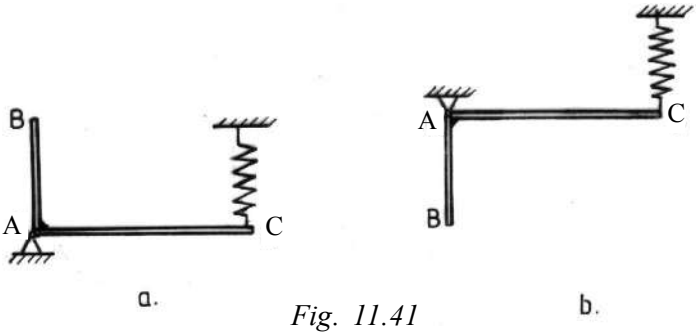


Fig. 11.41

R: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{6\cdot l}{31g}}$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot l}{11g}}$

37. Un fir elastic neîntins, are lungilea L = R = 1/5 m. El se alungeşte cu R/4 când, în poziţie verticală, se atârnă G la extremitate. Firul se prinde de un disc plin de greutate G şi din care se decupează un disc de rază R/2. Să se determine perioada micilor oscilaţii.

R: a) T = 0,4s; b) T ≅ 0,2s

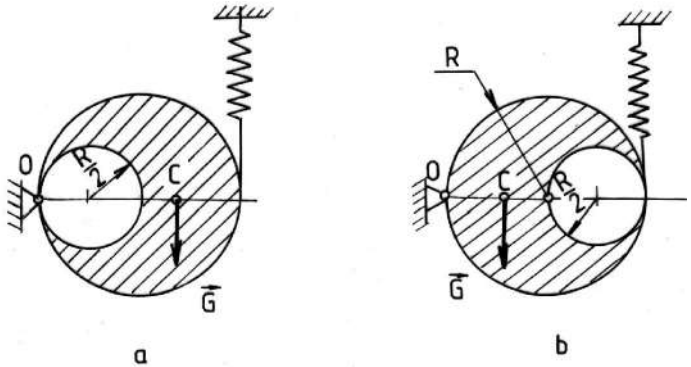


Fig. 11.42

38. Două corpuri de greutăţi G şi 2G sunt legate între ele printr-o bară fără greutate proprie. Între primul corp şi plan este frecare de coeficient μ. Sistemul este lansat cu $\bar{v}_0$ pe planul orizontal.

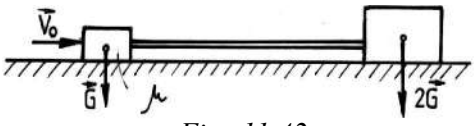


Fig. 11.42

a) Se cere forţa F din bară în timpul mişcării; b) Ce se întâmplă când bara are greutatea proprie G.

R: a) $F = -\frac{2\mu G}{3}$ b) corpul 2G : $F = -\mu G$ bara : $F_1 = \frac{\mu G}{2}$; corpul G : $F_1 = \frac{Ga}{g}$

39. Un disc de rază R şi greutate P şi un corp de greutate G sunt legate cu un fir şi situate pe două plane înclinate de unghi α ca în figură. Frecarea între corpul G şi plan este μ_1 =0,25.

Se cere coeficientul de frecare μ_2 între disc şi plan, pentru ca în timpul mişcării acesta să nu alunece pentru: a) P = 10G ; P = 0,1 G; c) P = 0,1G

R: a) μ_2 = 0,272; b) μ_2 = 0,28; c) μ_2 = 0,3

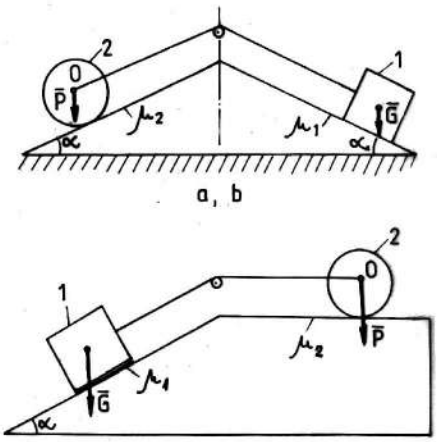


Fig. 11.43

40. Într-un vas de lăţime AB = l şi înălţime AC = l/2 se pune apă până la jumătate din înălţime. Vasul cu apă are greutatea G. De vas se prinde un fir de care se suspendă greutatea P (frecare între vas şi sol este μ = 0,5). Să se determine greutatea P, pentru ca în mişcare apa să fie pe punctul de a ieşi din vas (fig. 11.44).

R: P = 2G

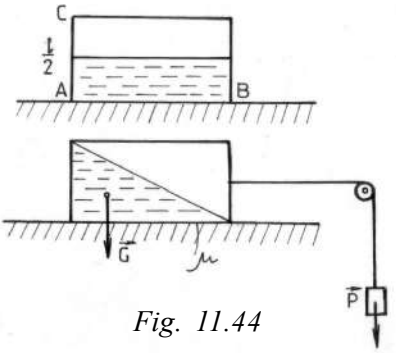


Fig. 11.44

41. O placă dreptunghiulă de greutate G, lăţime *l*, înălţime l/2, este ţinută în echilibru de două greutăţi P, aşezate cu frecare pe două plane înclinate de unghi α, astfel încât G este pe punctul de a aluneca în jos (fig. 11.45). Dacă se rupe un fir care va fi tensiunea în firul rămas şi ce forţă de reacţiune se va exercita

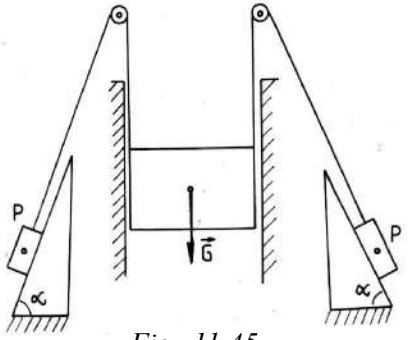


Fig. 11.45

asupra cadrului ştiind că μ_1 este coeficientul dec frecare între cadru şi greutate .

R:
$$T = P\left(\sin\alpha + \cos\alpha + \frac{a}{g}\right)$$
$$N = \frac{2G}{1-2\mu_1}\cdot\frac{G-2\mu_1(G+P)}{G+P-2\mu_1 P}$$

42. Într-un vas emisferic, este situată o bară AB de greutate G şi lungime *l*=R fără frecare. Bara va aluneca din poziția inițială reprezentată în figură. Să se determine când trece prin poziția orizontală ce forțe de reacțiune va exercita asupra vasului cât şi reacțiunile în poziția inițială (fig. 11.46).

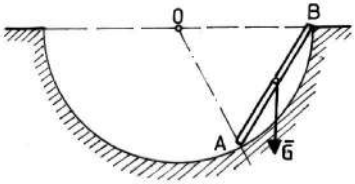


Fig. 11.46

R:
$$N = \frac{19\sqrt{3}G}{30}$$
$$N_1 = \frac{7\sqrt{3}G}{60};\ N_2 = \frac{13\sqrt{3}G}{60}$$

43. Discul de rază R şi greutate G, are sudat o bară de lungime 2R şi greutate G. Discul este articulat în O şi legat în B cu un fir. Dacă se rupe firul, să se determine reacțiunile din O la începutul mişcării. Dacă se rupe articulația, care este tensiunea din fir?

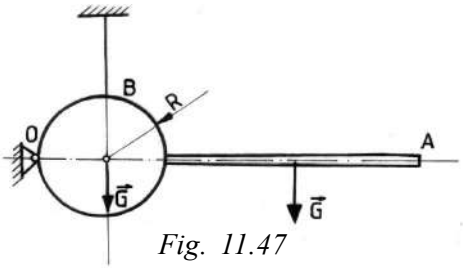


Fig. 11.47

R: $Y_A = -\frac{38}{65}G;\ T = \frac{58G}{41}$

44. Un disc de rază R = 0,5 m, greutate G = 10N are centrul de masă în A. Bara AB se roteşte cu turaţia n = 1200 rot/min. În B este suspendată greutatea P = 5N, iar în C există un reazem (BC = CA = 0,5m). Să se determine viteza unghiulară de precesie Ω.

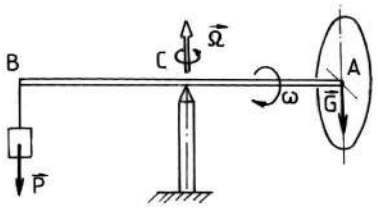


Fig. 11.48

R: $\Omega \cong 0{,}24\,\mathrm{rad/s}$

45. O bară de greutate (1) G = 10 N, lungime l = 0,5 m este prinsă în B pe bara AB de lungime *l* = 1m şi Q = 4N. În A este suspendată o greutate P = 12N. Bara (1) se roteşte cu turaţia n = 360 rot/min, în jurul lui B. Unde trebuie amplasat reazemul D pentru ca viteza unghiulară de precesie să fie Ω = 0,5 rad/s.

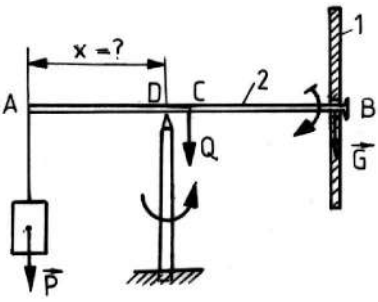


Fig. 11.49

R: AD = 0,446 m

12

PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

12.1. Forța de inerție 351
12.2. Torsorul forțelor de inerție 354
12.3 Probleme rezolvate 356
12.4. Probleme propuse 375

12

PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

12.1. FORȚA DE INERȚIE

Se consideră un corp C_1 de masă m, asimilat cu un punct material, aflat inițial în repaus sau în mișcare rectilinie şi uniformă având, deci, accelerația nulă (fig.12.1). Pentru a-i imprima o accelerație $\vec{a}$ corpului C_1, trebuie să acționăm asupra lui cu un alt corp C_2, numit agent motor sau corp accelerant. Mărimea acestei acțiuni este forța $\vec{F}_{21}$, care conform principiului acțiunii forței este:

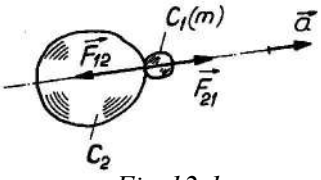


Fig.12.1

$$\vec{F}_{21} = m\vec{a}. \qquad (12.1)$$

Corpul C_1, numit şi corp accelerat va acționa asupra corpului C_2, cu o forță $\vec{F}_{12}$ egală şI de sens contrar, conform principiului acțiunii şi reacțiunii:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -m\vec{a} = \vec{F}^{i}. \qquad (12.2)$$

Această forță $\vec{F}_{12}$ ce acționează asupra agentului motor, se numeşte reacțiune sau forță de inerție şi se notează cu $\vec{F}^{i} = -m\vec{a}$.

Deci, forța de inerție este o forță reală pentru agentul motor şi o forță fictivă pentru corpul accelerat, căruia i s-a modificat starea de mişcare.

Forța de inerție se poate pune în evidență de oricine doreşte să pună în mişcare un corp, împingându-l cu mâna. El întâmpină o rezistență care se resimte cu atât mai mult, cu cât corpul are o masă mai mare sau cu cât i se imprimă o accelerație mai mare.

Fie un punct material de masă m, aflat în mişcare sub acțiunea unor forțe date a căror rezultantă este $\vec{F}^{a}$ şi a unor forțe de legătură a căror

rezultantă este $\vec{F}^p$.

$$\vec{F}^a + \vec{F}^p = m\vec{a}. \qquad (12.3)$$

Relația (12.3) se poate scrie astfel:

$\vec{F}^a + \vec{F}^p - m\vec{a} = 0$, ştiind că $-m\vec{a} = \vec{F}^i$, rezultă

$$\vec{F}^a + \vec{F}^p + \vec{F}^i = 0. \qquad (12.4)$$

S-a ajuns astfel la o ecuație analoagă cu ecuațiile de echilibru din statică; aceasta este ecuația de echilibru dinamic fictiv a lui d'Alembert. Ea permite enunțarea următorului **principiu al lui d'Alembert**:

"dacă pe lângă forțele date şi de legătură, s-ar aplica asupra punctului material şi forța de inerție atunci sistemul de forțe astfel obținut ar fi în echilibru."

Cu alte cuvinte, forțele active, pasive şi de inerție formează în orice moment un sistem de forțe în echilibru.

Pentru mai multă claritate, să studiem cazul unui pendul matematic (fig.12.2). Punctul de masă m este legat cu un fir inextensibil de un punct fix O şi lăsat liber într-o poziție oarecare. Asupra punctului acționează forța activă, dată $\vec{G}$-greutatea punctului şi forța pasivă, de legătură $\vec{S}$-efortul din fir. Dacă se ataşează punctului şi forța de inerție $\vec{F}^i = -m\vec{a}$ atunci sistemul de forțe se va afla în echilibru. Dar acest echilibru este însă un **echilibru dinamic fictiv**. Aşadar, ecuația (12.4) devine:

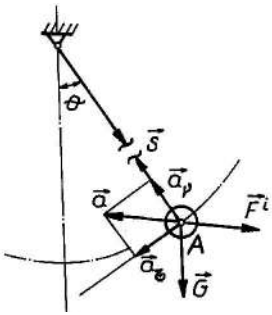


Fig.12.2

$$\vec{G} + \vec{S} + \vec{F}^i = 0. \qquad (12.5)$$

Principiul lui d'Alembert scris sub forma (12.4) conduce la o metodă de studiu comodă şi utilă în aplicațiile tehnice, numită **metoda cinetostatică**.

În felul acesta problemele de dinamică se tratează ca şi cele din cinematică şi statică, de unde îi vine şi denumirea de metodă cineto-statică.

Adică, se face o analiză a mişcărilor corpurilor, se calculează accelerațiile şi se scriu ecuațiile de echilibru din statică, după ce s-au reprezentat toate forțele active, pasive şi de inerție.

În cazul rigidului se pune şi condiția ca momentul rezultant al forțelor

active, pasive şi de inerţie să fie nul. Ecuaţiile de echilibru fictiv sunt:

$$\vec{R}^{a} + \vec{R}^{p} + \vec{R}^{i} = 0; \tag{12.6}$$

$$\vec{M}^{a}_{O_1} + \vec{M}^{p}_{O_1} + \vec{M}^{i}_{O_1} = 0. \tag{12.7}$$

Principiul lui d'Alembert, în cazul rigidului se poate enunţa astfel: "forţele exterioare active şi pasive ce acţionează asupra rigidului, împreună cu forţele de inerţie, formează la orice moment un sistem de forţe în echilibru".

Relaţiile (12.6) şi (12.7) pot fi restrânse în una singură dacă se observă că $\vec{R}^{a}$ şi $\vec{M}^{a}_{O_1}$ reprezintă elementele torsorului forţelor exterioare active, $\vec{R}^{p}$ şi $\vec{M}^{p}_{O_1}$ -elementele torsorului forţelor exterioare pasive iar $\vec{R}^{i}$ şi $\vec{M}^{i}_{O_1}$ elementele torsorului forţelor de inerţie. Astfel se poate scrie:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{F}^{a}_{i}\right) + \tau_{O_1}\left(\vec{F}^{p}_{i}\right) + \tau_{O_1}\left(\vec{F}^{i}\right) = 0,$$

relaţie care exprimă sub **forma cea mai generală** principiul lui d' Alembert: "torsorul forţelor exterioare active şi pasive împreună cu torsorul forţele de inerţie dau un torsor nul" sau "torsorul forţelor exterioare date şi de legătură este echilibrat de torsorul forţele de inerţie".

În cazul general, ecuaţiile vectoriale (12.6) şi (12.7) se proiectează pe axele unui sistem cartezian de referinţă, obţinându-se şase ecuaţii scalare de echilibru fictiv:

$$\left.\begin{aligned} X^{a} + X^{p} + X^{i} &= 0; \\ Y^{a} + Y^{p} + Y^{i} &= 0; \\ Z^{a} + Z^{p} + Z^{i} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M^{a}_{x} + M^{p}_{x} + M^{i}_{x} &= 0; \\ M^{p}_{y} + M^{p}_{y} + M^{i}_{y} &= 0; \\ M^{a}_{z} + M^{p}_{z} + M^{i}_{z} &= 0; \end{aligned}\right\}. \tag{12.8}$$

Aceste ecuaţii servesc la studiul problemelor de dinamică prin metode utilizate în statică, determinându-se reacţiunile dinamice şi a legilor de mişcare.

Indicaţii privind aplicarea metodei cinetostatice:

-se izolează corpurile, în cazul unui sistem suprimându-se legăturile acestora;

-înlocuirea legăturilor interioare şi exterioare cu reacţiunile corespunzătoare;

-analiza cinematică a sistemului de corpuri şi stabilirea relaţiilor dintre

accelerațiile liniare şi unghiulare ale corpurilor;

-introducerea forțelor şi momentelor de inerție fiecărui corp în parte;

-scrierea ecuațiilor de echilibru dinamic, fictiv între forțele date, de legătură şi de inerție, pentru fiecare corp în parte;

-rezolvarea sistemului de ecuații astfel obținut şi determinarea legilor de mişcare şi a reacțiunilor dinamice.

12.2. TORSORUL FORȚELOR DE INERȚIE

În relațiile vectoriale ce exprimă principiul lui d'Alembert pentru solidul rigid (12.6) şi (12.7) intervin: rezultanta forțelor de inerție $\vec{R}^i$ şi momentul rezultant al forțelor de inerție $\vec{M}^i_{O_1}$, în raport cu un pol fix sau centrul de masă al rigidului. Acest ansamblu format din cei doi vectori $\left(\vec{R}^i, \vec{M}^i_{O_1}\right)$ formează torsorul forțelor de inerție. Simbolic se notează astfel:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{F}^i\right) = \left(\vec{R}^i, \vec{M}^i_{O_1}\right). \qquad (12.9)$$

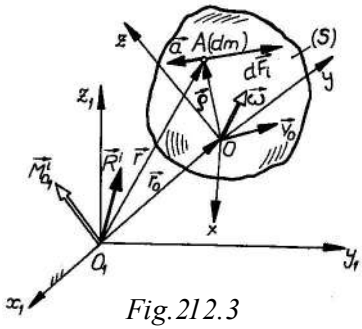


Fig.212.3

În continuare se va determina torsorul forțelor de inerție pentru un rigid în mişcare generală. În figura 12.3 se consideră un asemenea rigid în mişcare generală față de un sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$. Mişcarea generală este caracterizată de parametrii cinematici $\vec{v}_O$ şi $\vec{\omega}$. Un punct A, oarecare al rigidului, sediul unei mase elementare dm, are accelerația $\vec{a}$. Acestui punct i se poate ataşa forța de inerție $d\vec{F}^i = -\vec{a}dm$.

Ataşând fiecărui punct al rigidului câte o forță de inerție elementară, se ajunge astfel la un sistem de vectori distribuiți continuu în interiorul domeniului (S) din spațiu ocupat de solidul rigid. Torsorul acestui sistem de forțe de inerție va avea componentele:

$$\vec{R}^i = \int_{(S)} d\vec{F}^i = -\int_{(S)} \vec{a}dm = -\int_{(S)} \frac{d\vec{v}}{dt}dm = -\frac{d}{dt}\int_{(S)} \vec{v}dm = -\frac{d}{dt}\vec{H} = -\dot{\vec{H}},$$

Deci, $\vec{R}^{i} = -\dot{\vec{H}} = -M\vec{a}_C$. (12.10)

Rezultanta forţelor de inerţie este egală cu impulsul derivat în raport cu timpul, luat cu semnul minus

$$\vec{M}^{i}_{O_1} = \int_{(S)} \vec{r} \times d\vec{F}^{i} = -\int_{(S)} \vec{r} \times \vec{a} dm = -\int_{(S)} \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} dm = -\frac{d}{dt}\int_{(S)} \vec{r} \times d\vec{H} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_{(S)} d\vec{K}_{O_1},$$

Deci, $\vec{M}^{i}_{O_1} = -\dot{\vec{K}}_{O_1}$. (12.11)

Se menţionează că masa elementară dm, nu variază în timp şi deci introducerea ei sub operatorul d/dt este permisă, iar schimbarea ordinei între operaţiile de integrare şi derivare este de asemenea permisă deoarece integrarea (însumarea) se face pentru un moment dat (instantaneu) deci, nu în timp. Pentru a justifica complet transformările care au condus la relaţia (12.11) se menţionează că $\int \dot{\vec{r}} \times \vec{v} dm = 0$, cei doi vectori fiind coliniari.

Relaţia (12.11) arată că momentul forţelor de inerţie faţă de un pol fix (sau faţă de centrul de masă) este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul, calculat faţă de acelaşi pol, luat cu semnul minus.

Expresia generală a torsorului forţelor de inerţie în polul fix O_1 este:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{F}^{i}\right) = \begin{cases} \vec{R}^{i} = -\dot{\vec{H}} = -M\vec{a}_C; \\ \vec{M}^{i}_{O_1} = -\dot{\vec{K}}_{O_1}. \end{cases} \quad (12.12)$$

Din (12.12) rezultă că torsorul forţelor de inerţie, localizat în polul fix O_1 este egal cu torsorul impulsurilor derivat în raport cu timpul şi luat cu semn schimbat. Simbolic se poate scrie:

$$\tau_{O_1}\left(\vec{R}^{i}, \vec{M}^{i}_{O_1}\right) = -\frac{d}{dt}\tau_{O_1}\left(\vec{H}, \vec{K}_{O_1}\right) \quad (12.13)$$

În aplicaţiile practice, torsorul forţelor de inerţie este indicat să se reducă în centrul de masă al rigidului. Torsorul forţelor de inerţie, faţă de centrul de masă al rigidului are expresia:

$$\tau_C\left(\vec{F}^i\right)=\begin{cases}\vec{R}^i=-\dot{\vec{H}}=-M\vec{a}_C;\\ \vec{M}_C^i=-\dot{\vec{K}}_C^{rot}.\end{cases} \tag{12.14}$$

Comparând teoremele impulsului (11.6) şi momentului cinetic (11.12) cu principiul lui d'Alembert (12.6) şi (12.7) observăm o analogie perfectă:

Teoremele impulsului: Principiul lui d'Alembert:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{R}^a+\vec{R}^p=\dot{\vec{H}};\\ &\vec{M}_{O_1}^a+\vec{M}_{O_1}^p=\dot{\vec{K}}_{O_1};\end{aligned}\right\}\quad\left\{\begin{aligned}&\vec{R}^a+\vec{R}^p+\vec{R}^i=0;\\ &\vec{M}_{O_1}^a+\vec{M}_{O_1}^p+\vec{M}_{O_1}^i=0.\end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

12.3. PROBLEME REZOLVATE

1. O bară omogenă de lungime l şi masă m (fig.12.4) articulată în capătul O, este lăsată să cadă liber din poziţia orizontală. Să se determine şi să se reprezinte torsorul forţelor de inerţie în centrul de masă, în polul fix O şi într-un punct pe axa centrală a forţelor de inerţie. De asemenea să se calculeze reacţiunile dinamice din artculaţia O pentru o poziţie oarecare a barei şi legea de mişcare.

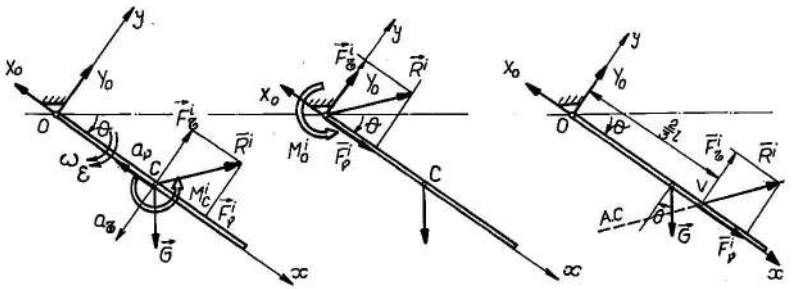


Fig.12.4

Rezolvare. Se alege un sistem de referinţă mobil Oxy, solidar cu bara. În figura 12.4 a. s-a reprezentat torsorul forţelor de inerţie în centrul de masă. Torsorul are următoarele elemente:

$$\tau_C\left(\vec{F}^i\right)=\begin{cases}\vec{R}^i=-m\vec{a}_C=m\dfrac{l}{2}\omega^2\vec{i}+m\dfrac{l}{2}\varepsilon\vec{j};\\ \vec{M}_C^i=-\dot{\vec{K}}_C^{rot}=-J_C\dot{\vec{\omega}}=J_C\varepsilon\vec{k}=\dfrac{ml^2}{12}\varepsilon\vec{k}.\end{cases}$$

Torsorul forțelor de inerție în polul O (fig.12.4,b) are expresia:

$$\tau_O\left(\vec{F}^i\right)=\begin{cases}\vec{R}^i=-m\vec{a}_C=m\dfrac{l}{2}\omega^2\vec{i}+m\dfrac{l}{2}\varepsilon\vec{j};\\ \vec{M}_O^i=-\dot{\vec{K}}_O^{rot}=-J_C\vec{\varepsilon}=J_C\varepsilon\vec{k}=\dfrac{ml^2}{3}\varepsilon\vec{k}.\end{cases}$$

Forțele de inerție, după axa centrală se reduc la o forță unică egală cu rezultanta $\vec{R}^i=-m\vec{a}_C$. Cunoscând torsorul forțelor de inerție în polul O, ecuația axei centrale se determină cu relația:

$$M_{Oz}-xY-yX=0,$$

unde $$M_{Oz}=\frac{ml^2}{3}\varepsilon;Y=\frac{ml}{2}\varepsilon \text{ şi } X=\frac{ml}{2}\omega^2,$$

rezultând $2l\varepsilon-3\varepsilon x+3\omega^2 y=0.$

Făcând intersecția cu axa Ox ($y=0$) rezultă punctul V de coordonate $x_V=(2/3)l$ şi $y_V=0,$ punct al axei centrale.

Torsorul forțelor de inerție în punctul V are componentele (fig.12.4,c):

$$\tau_V\left(\vec{F}^i\right)=\begin{cases}\vec{R}^i=-m\vec{a}_C=m\dfrac{l}{2}\omega^2\vec{i}+m\dfrac{l}{2}\varepsilon\vec{j};\\ \vec{M}_V^i=0.\end{cases}$$

Conform principiului lui d'Alembert forța activă, dată $\vec{G}$, forța pasivă de legătură $\vec{R}_O=-X_O\vec{i}+Y_O\vec{j}$ împreună cu $\vec{R}^i$, formează un sistem de forțe în echilibru. Ecuațiile scalare de echilibru dinamic fictiv sunt (v. fig.12.4,c):

$$\sum X_i = 0; -X_O + m\frac{l}{2}\omega^2 + mg\sin\theta = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0;\ Y_O - mg\cos\theta + m\frac{l}{2}\varepsilon = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_{O_i} = 0; -\frac{l}{2}mg\cos\theta + \frac{2}{3}lm\frac{l}{2}\varepsilon = 0; \qquad (3)$$

Din ecuația a (3)-a rezultă $\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3g}{2l}\cos\theta$, din care prin integrare se obține viteza unghiulară a barei:

știind că $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega\, d\theta}{d\theta\, dt}$, deci $\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^\theta \cos\theta d\theta$, , de unde:

$$\omega^2 = 3\frac{g}{l}\sin\theta. \qquad (4)$$

Înlocuind expesiile lui w şi e în relațiile (1) şi (2) rezultă reacțiunile dinamice:

$X_O = 2{,}5mg\sin\theta$ şi $Y_O = 0{,}25mg\cos\theta$.

2. Un cilindru omogen de rază R şi masă m se rostogoleşte pe un plan orizontal aspru sub acțiunea forței Q(t) = 0,12 mg (t + 1) şi a cuplului de moment M(t) = 0,24 mg R (t^2 + t). Să se calculeze timpul t_1 după care forța de aderență îşi schimbă sensul şi timpul t_2 după care cilindrul începe să patineze. Coeficientul de frecare de alunecare este m = 0,14 iar frecarea de rostogolire se neglijează (fig.12.5).

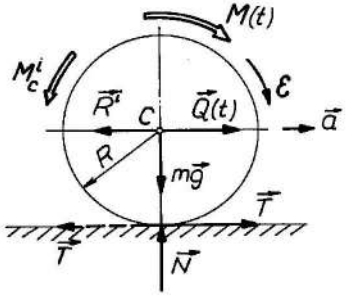


Fig.12.5

Rezolvare. a) La timpul t = 0, M(t) = 0, cilindrul la începutul mişcării este tras cu forța Q(t), forța de aderență T fiind orientată spre stânga.

După un timp t_1 forța de aderență își schimbă sensul, roata trasă (cilindrul) devenind roată motoare. La momentul t_1 forța de aderență este nulă. După reprezentarea torsorului forțelor de inerție $\vec{R}^i = -m\vec{a}_C$ și $\vec{M}_C^i = -J_C\vec{\varepsilon}$, ecuațiile de echilibru dinamic fictiv sunt:

$$\sum X_i = 0;\ 0{,}12mg(t+1) - ma_C = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{C_i} = 0;\ J_C\varepsilon - 0{,}24mgR(t^2+t) = 0. \quad (2)$$

Știind că $J_C = \frac{mR^2}{2}$ și $\varepsilon = \frac{a_C}{R}$ rezultă prin înlocuire, $a_C = 0{,}12g(t+1)$ și $0{,}12(t+1) = 0{,}48(t^2+t)$, de unde $t_1 = 0{,}25$ secunde.

b) În situația când roata devine motoare, la un timp t_2 ea începe să patineze. Forța de aderență este spre dreapta, iar condiția de patinare la limită este, T = mN. Ecuațiile de echilibru dinamic fictiv sunt:

$$\sum X_i = 0;\ 0{,}12mg(t+1) - ma_C + \mu N = 0; \qquad (3)$$

$$\sum Y_i = 0;\ N - mg = 0; \qquad (4)$$

$$\sum M_{C_i} = 0; -0{,}24mgR(t^2+t) + J_C\varepsilon + \mu NR = 0. \qquad (5)$$

Din ecuațiile (4) și (5) rezultă că $a_C = 0{,}12g(t+1) + \mu g$.

Înlocuind în (5) expresia lui a_C, știind că $\varepsilon = a_C / R$ și $J_C = mR^2/2$, rezultă:

$$0{,}12(t+1) + 3\mu = 0{,}48(t^2+t).$$

Dacă $m = 0{,}14$ rezultă ecuația $8t^2 + 6t - 9 = 0$ cu soluția acceptabilă $t^2 = 0{,}75$ sec.

3. Aplicând principiul lui d'Alembert, să se determine accelerația centrului de masă al cilindrului 3 și eforturile din fir pentru sistemul de corpuri din figura 12.6,a. Sistemul este format din prisma 1 de greutate

Q, scripetele 2 de rază R şi greutate Q/2 şi cilindrul 3 de greutate 2Q. Firul, considerat inextensibil este înfăşurat pe cilindru şi trecut peste scripetele 2. Coeficientul de frecare la rostogolire a cilindrului pe planul orizontal este s, iar frecarea în axul scripetelui se neglijează.

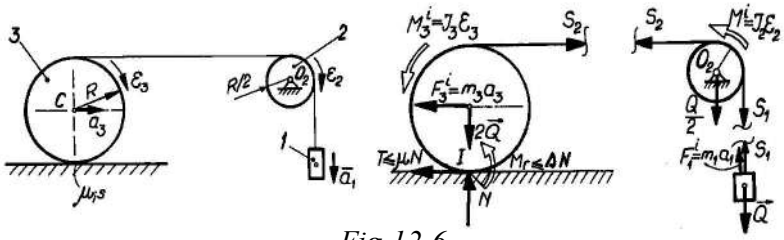


Fig.12.6

Rezolvare. Se analizează mişcările corpurilor, se reprezintă acceleraţiile liniare şi unghiulare. Se izolează corpurile (fig.12.6,b), se reprezintă toate forţele active, pasive şi de inerţie:

Ecuaţiile scalare de echilibru dinamic sunt:

-pentru prisma 1: $\sum Y_i = 0;\ Q - m_1a_1 - S_1 = 0;$ (1)

-pentru scripetele 2: $\sum M_{O_2} = 0; S_1R - J_2\varepsilon_2 - S_2R = 0;$ (2)

-pentru cilindrul 3: $\sum X_i = 0;\ S_2 - m_3a_3 - T = 0;$ (3)

$$\sum Y_i = 0;\ N - 2Q = 0;$$ (4)

$$\sum M_C = 0; S_2R - J_3\varepsilon_3 + TR - sN = 0.$$ (5)

Relaţiile între acceleraţiile liniare şi unghiulare ale corpurilor sunt:

$$a_1 = \varepsilon_2R = 2R\varepsilon_3; a_3 = \frac{a_1}{2} = R\varepsilon_3;$$

Se exprimă toate acceleraţiile în funcţie de a_3:

$$a_1 = 2a_3; \varepsilon_3 = \frac{a_3}{R}; \varepsilon_2 = \frac{2a_3}{R}.$$ (6)

Momentele de inerţie mecanice sunt:

$$J_2 = \frac{m_2 R^2}{2} = \frac{QR^2}{4g}; J_3 = \frac{m_3 4R^2}{2} = \frac{4QR^2}{g}; \quad (7)$$

Înlocuind în sistemul de ecuaţii relaţiile (6) şi (7) şi eliminând necunoscutele S_1, S_2, T şi N, rezultă o ecuaţie în a_3 din care obţinem:

$$a_3 = \frac{2(1 - s/R)}{13} g. \quad (8)$$

Înlocuind a_3 în ecuaţiile (1) şi (2) rezultă eforturile:

$$S_1 = \frac{9 + 4s/R}{13} Q; S_2 = \frac{8 + 5s/R}{13} Q.$$

4. Un buştean 1 de formă cilindrică, de greutate 2Q, este suspendat prin intermediul unui cablu trecut peste troliul 2, de greutate Q şi raze r, respectiv R = 2r (fig. 12,7). Raza de inerţie a troliului este $i = r\sqrt{2}$. Considerând că sistemul se pune în mişcare din repaus şi că între cablu şi buştean nu există alunecare, să se determine acceleraţia centrului de masă al buşteanului şi eforturile dinamice din cele două ramuri ale cablului.

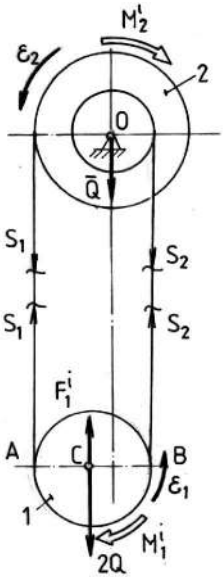


Fig.212.7

Rezolvare:

Se reprezintă forţa şi momentele de inerţie pentru cele două corpuri, în sens invers acceleraţiilor. Se izolează corpurile, înlocuind legăturile interioare cu reacţiunile S_1 şi S_2. Ecuaţiile de echilibru dinamic fictiv pentru fiecare corp în parte sunt:

$$(1) \begin{cases} \sum Y_i = 0; \quad S_1 + S_2 + F_1^i - 2Q = 0 \\ \sum M_c = 0; \quad \frac{3r}{2} \cdot S_2 - \frac{3r}{2} \cdot S_1 - M_1^i = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum M_0 = 0; \quad 2rS_1 - rS_2 - M_2^i = 0$$

Dar: $F_1^i = m_1 a_1 = \frac{2Q}{g} a_1$;

$$M_1^i = J_1 \varepsilon_1 = \frac{2Q}{g} \cdot \frac{g r^2}{8} \cdot \frac{2 a_1}{r} = \frac{g}{2} Q r \frac{a_1}{g};$$

$$M_2^i = J_2 \varepsilon_2 = i^2 \cdot m_2 \cdot \varepsilon_2 = \frac{Q}{g} 2r^2 \cdot \frac{2a_1}{r} =$$

$$= 4Q r \cdot \frac{a_1}{g}$$

Relațiile cinematice: $a_1 = \varepsilon_1 \cdot CI = \varepsilon_1 \left(\frac{3r}{2} - r \right) = \varepsilon_1 \frac{r}{2}$; $\varepsilon_1 = \frac{2a_1}{r}$

$$r\varepsilon_2 = r\varepsilon_1 \; ; \; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{2a_1}{r}$$

Din primele două ecuații rezultă: $S_2 = Q - \frac{F_1^i}{2} + M_1^i \cdot \frac{1}{3r}$;

Din ultimele două ecuații rezultă: $S_1 = \frac{M_2^i}{r} + M_1^i \cdot \frac{2}{3r}$.

Înlocuind eforturile S_1 şi S_2 în prima ecuație, obținem:

$a_1 \frac{2}{19} g = 1{,}03 \; m/s^2$, accelerația buşteanului.

Eforturile dinamice, după înlocuirea lui F_1^i, M_1^i şi M_2^i, vor fi:

$$S_1 = \frac{14}{19} Q = 0{,}73 Q \; ; \; S_2 = \frac{20}{19} Q = 1{,}05 Q$$

5. Două bare omogene (fig. 12.8), OA = a şi OB = b, rigidizate între ele, formând un unghi drept în O, sunt articulate de un ax vertical în jurul căruia se rotesc cu viteza unghiulară constantă ω_0. Greutatea pe unitatea de lungime fiind q, să se

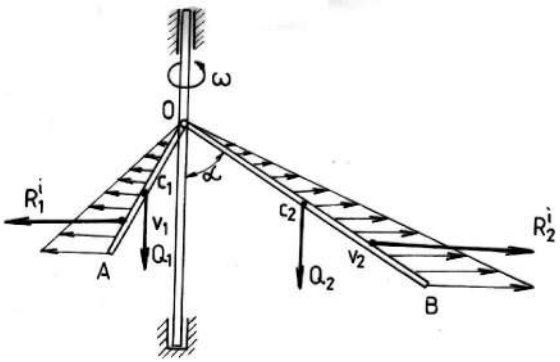


Fig.212.8

determine viteza unghiulară ω_0 pentru care cele două bare formează unghiuri egale față de axa verticală.

Rezolvare:

De-a lungul barelor, forțele elementare de inerție au o distribuție triunghiulară. Rezultantele acestor forțe de inerție acționează la distanța 2/3, față de vârful O, din lungimea barei. Rezultantele forțelor de inerție au expresiile:

$$R_1^i = m \cdot a_{c_1}^v = \frac{a^2 \cdot q}{2g}\omega^2 \cos\alpha \; ; \; R_2^i = m \cdot a_{c_2}^v = \frac{b^2 \cdot q}{2g}\omega^2 \sin\alpha$$

Ecuația de echilibru dinamic fictiv este:

$$\sum M_0 = 0 \; ; \; Q_1 \cdot \frac{a}{2}\cos\alpha - R_1^i \cdot \frac{2}{3}a\sin\alpha - Q_2 \cdot \frac{b}{2}\sin\alpha + R_2^i \cdot \frac{2}{3}\cos\alpha = 0$$

Înlocuind $Q_1 = a\,q$, $Q_2 = b\,q$ şi R_1^i, R_2^i, rezultă:

$$\omega^2 = \frac{3(b^2 \sin\alpha - a^2\cos\alpha)}{(b^3 - a^3)\sin 2\alpha}$$

Pentru $\alpha = 45^0$, rezultă: $\omega^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(b^2 - a^2)}{(b^3 - a^3)}g$.

6. O sferă omogenă de rază R şi masă m_1 este aşezată pe o scândură de masă m_2, aşezată la rândul ei pe o masă fixă (vezi figura 12.9., a). Coeficientul de frecare la alunecare între sferă şi scândură este μ_1, iar coeficientul de frecare la alunecare între scândură şi masa fixă este μ_2. Scândura este trasă orizontal cu o forță F, astfel încât alunecă pe masă. Să se calculeze: a) forța de frecare dintre corp şi scândură; b) acceleraţiile scândurii şi a centrului de greutate al sferei; c) acceleraţia unghiulară a sferei; d) poziţia axei instantanee de rotaţie a sferei.

Aplicaţie numerică: $m_1 = 1$ kg; $m_2 = 4$ kg; R = 0,1 m; F = 24,8 N; $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}2$.

Rezolvare:

Se izolează corpurile ca în figura 12.9, b, reprezentându-se toate forțele active, pasive şi de inerție. Ecuațiile de echilibru dinamic fictiv pentru fiecare corp în parte sunt:

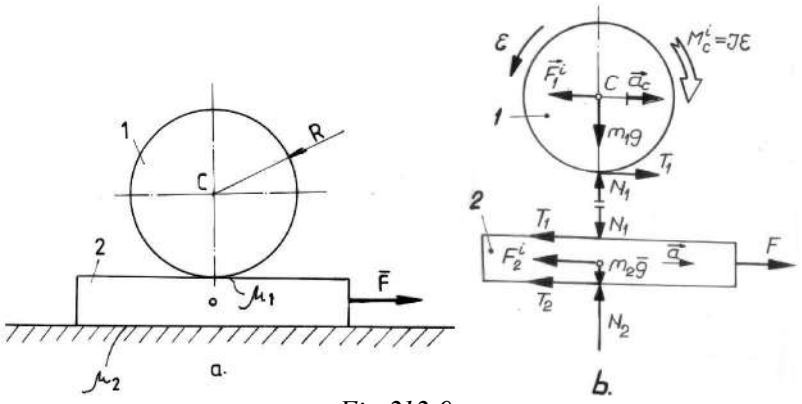


Fig.212.9.

Cilindrul 1 $\begin{cases} \sum X_i = 0\,; & T_1 - m_1 a_c = 0; \\ \sum Y_i = 0\,; & N_1 - m_1 g = 0; \\ \sum Z_i = 0\,; & J\varepsilon - R\,T_1 = 0; \end{cases}$

Scândura 2 $\begin{cases} \sum X_i = 0\,, & F - T_1 - T_2 - m_2 a_2 = 0 \\ \sum Y_i = 0\,, & N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \end{cases}$

La aceste ecuații se adaugă relațiile: $a_c = a_2 - \varepsilon R\ ;\ T_2 = \mu_2 \cdot N_2$ (6)

a) Din relațiile (2), (4), (5) şi (6) rezultă:

$$T_2 = \mu_2 (N_1 + m_2 g) = \mu g (m_1 + m_2)\,;\ a_2 = \frac{F - T_1 - \mu_2 g (m_1 + m_2)}{m_2} \quad (7)$$

Din relațiile (1), (3) şi (6) rezultă:

$$T_1 = m_1 a_c = m_1 (a_2 - \varepsilon R) = m_1 a_2 - \frac{m_1 R^2}{J} T_1 \quad (8)$$

Înlocuind a_2 din (7) în (8), rezultă T_1 sub forma:

$$T_1 = \frac{F - \mu_2 g (m_1 + m_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2 R^2}{J}} \quad \text{unde } J = \frac{2}{5} m_1 R^2 \text{ pentru sferă.}$$

Condiția de nealunecare este: $T_1 < \mu_1 m_1 g$

Aplicație numerică: $T_1 = \dfrac{24{,}8 - 0{,}2 \cdot 9{,}8(1+4)}{1+4+\dfrac{4\cdot 5}{2}}$

Sfera se rostogolește fără alunecare.

b) Accelerațiile centrului sferei și al scândurii, conform (1) și (7) sunt:

$$a_c = \frac{T_1}{m_1} = \frac{1\,\text{N}}{1\,\text{kg}} = 1\,\text{m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{F_1 - T_1 - \mu_2 g(m_1 + m_2)}{m_2} = \frac{24{,}8 - 1 - 0{,}2 \cdot 9{,}81(1+4)}{4} = 3{,}5\ \text{m/s}^2$$

c) Accelerația unghiulară a sferei, conform relației (3), este:

$$\varepsilon = \frac{R\,T_1}{J} = \frac{5}{2}\frac{T_1}{m_1 R} = \frac{5\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 0{,}1} = 25\ \text{rad/s}^2$$

d) Poziția axei instantanee de rotație a sferei

Accelerațiile celor două corpuri fiind proporționale cu vitezele, se pot scrie relațiile:

$$\frac{a_2}{a_c} = \frac{R + R_c}{R_c}, \text{ de unde } R_c = \frac{a_c R}{a_2 - a_c} = \frac{1\cdot 0{,}1}{3{,}5 - 1} = 0{,}04\ \text{m}$$

Centrul instantaneu de rotație de află deasupra centrului sferei, pe diametrul vertical, la distanța 0,04 m față de C.

7. O placă dreptunghiulară de masă m, având dimensiunile din figura 12.10, se rotește în ajurul unui ax vertical cu viteza unghiulară constantă ω. Ea este menținută în poziția reprezentată în figură, prin intermediul unui fir AB. Să se determine reacțiunile dinamice din fir și articulația O.

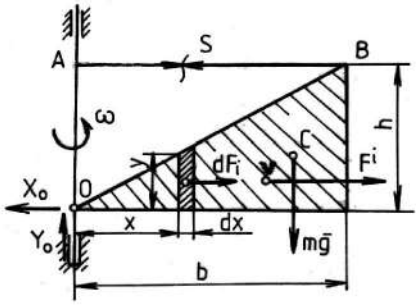


Fig.212.10.

Rezolvare:

Se detașează o suprafață elementară de arie dA și masă elementară dm, asupra căreia

acționează o forță elementară de inerție dF^i. Expresiile acestora sunt:

$$dA = y \cdot dx = \frac{h\,x\,dx}{b};\ dm = \frac{M}{A}dA = \frac{2m\,h\,x}{b^2\,h}dx;$$

$$dF^i = a_c^v\,dm = x\,\omega^2\,dm = \frac{2m\,\omega^2}{b^2}x^2\,dx$$

de unde: $F^i = \int_0^b \frac{2m\,\omega^2}{b^2}x^2\,dx = \frac{2m\,b\,\omega^2}{3}$

Poziția rezultantei forțelor de inerție se determină aplicând teorema lui Varignon pentru sistemele de forțe coplanare:

$$y_c = \frac{\int \frac{y}{2}dF^i}{F^i} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^b \frac{h\,x}{b}\cdot\frac{2m\,\omega^2\,x^2}{b^2}dx}{\frac{2m\,b\,\omega^2}{3}} = \frac{3h}{2b^4}\int_0^b x^3\,dx = \frac{8}{3}h$$

Rezultanta forțelor de inerție este paralelă cu axa Ox la distanța 3h/8 față de aceasta.

Ecuațiile de echilibru dinamic pentru forțele ce acționează asupra plăcii sunt:

$$\sum X_i = 0; \qquad -X_0 + F^i - S = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_0 + m\,g = 0$$

$$\sum M_{0i} = 0; \qquad -\frac{3}{8}h\cdot F^i - \frac{2}{3}b\,m\,g + S\,h = 0$$

Înlocuind forța de inerție rezultantă F^i, rezultă:

$$X_0 = \frac{2}{3}m\,b\,\omega^2 - \frac{m}{12}\left(3b\,\omega^2 + \frac{8b}{h}\right);\ Y_0 = m\,g;\ S = \frac{m}{12}\left(3b\,\omega^2 + \frac{8b}{h}g\right).$$

8. În capătul D al unui fir inextensibil, înfăşurat pe discul A de rază r, acționează o forță $\vec{P}$ sub unghiul α față de orizontală (fig.12.11). Discul A de rază r este solidar cu discul B de rază R = 2r, care se rostogoleşte pe un plan orizontal. Întregul ansamblu are masa m = P/g şi raza de inerție $i = \sqrt{R \cdot r}$. Să se determine unghiul α maxim pentru care corpul

se rostogoleşte fără patinare şi acceleraţia centrului de masă al discului, corespunzătoare acestui unghi maxim, dacă coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0{,}1$.

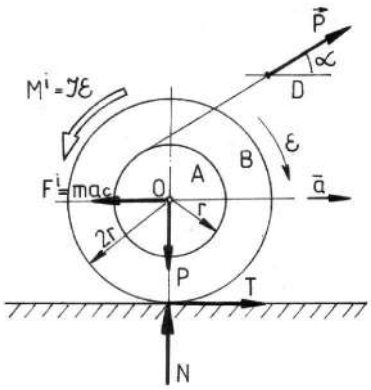


Fig.212.11.

Rezolvare:

Se reprezintă toate forţele active, pasive şi de inerţie, rezultanta forţelor de inerţie în sens invers acceleraţiei a, şi momentul forţelor de inerţie în sens invers lui ε.

Ecuaţiile de echilibru dinamic fictiv sunt:

$$\sum X_i = 0 ; \qquad T + P\cos\alpha - m a_c = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \qquad N + P\sin\alpha - P = 0 ;$$

$$\sum M_c = 0 ; \qquad r P - R T - J_c \varepsilon = 0 ;$$

La aceste relaţii se adaugă ecuaţiile:

$$T = \mu N ; \; a_c = 2r\varepsilon ; \; J_c = m i^2 = \frac{P}{g} R r.$$

Reacţiunea normală N înlocuită în prima relaţie conduce la:

$$a_c = (\mu - \mu\sin\alpha + \cos\alpha) g$$

Din ecuaţia a treia, făcând toate înlocuirile, rezultă:

$$3\mu(1 - \sin\alpha) = 1 - \cos\alpha$$

Aceasta este o ecuaţie trigonometrică, în care se înlocuiesc:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \text{ şi } \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ unde } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Rezultă: $\frac{3\mu}{2} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2$ de unde $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{3\mu}}} = 0{,}279$

Deci: $\alpha_{max} = 2\operatorname{arctg} 0{,}279 = 31^\circ 12'$

Acceleraţia centrului de masă este:

$$a_c = (0{,}1 - 0{,}1\sin\alpha_{max} + \cos\alpha_{max}) g = 8{,}85 \text{ m/s}^2 .$$

9. Un troliu de masă m = 2P/g, având raza de inerție $i = \sqrt{R \cdot r}$, are posibilitatea să se rostogolească fără alunecare pe un plan înclinat de unghi α (φιγ.12.12), sub acțiunea unei forțe P ce acționează în capătul A al firului înfășurat pe circumferința de rază R = 2r. Să se determine: a) accelerația centrului de masă al troliului; b) valoarea maximă a unghiului α, pentru care troliul se rostogolește fără alunecare, știind că $\mu = 2/3$.

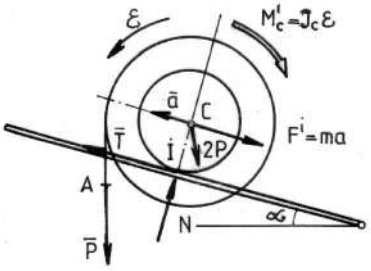


Fig.212.12.

Rezolvare:

Se reprezintă forțele active date și cele pasive de legătură. În sens invers accelerației a și accelerației unghiulare ε, se reprezintă torsorul forțelor de inerție.

Ecuațiile de echilibru dinamic fictiv sunt:

$$\sum X_i = 0 ; \qquad T - F^i - 2P\sin\alpha - P\sin\alpha = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \qquad N - P\cos\alpha - 2P\cos\alpha = 0 ;$$

$$\sum M_c = 0 ; \qquad 2rP - rT - M_c^i = 0 ;$$

La aceste ecuații de adaugă:

$$F^i = ma = \frac{2P}{g}a ; \; M_c^i = mi^2\varepsilon = \frac{2P}{g}\cdot 2r^2 \cdot \frac{a}{r} ; \; \varepsilon = \frac{a}{r}$$

Prin înlocuirea acestor expresii, sistemul de ecuații devine:

$$T = ma + 3P\sin\alpha ; \; N = 3P\cos\alpha ; \; Tr = 2rP - J_c\varepsilon ;$$

Înlocuind forța de aderență T în ultima relație, rezultă:

$$r(ma + 3P\sin\alpha) = 2rP - \frac{4Pra}{g}, \text{ deci: } a = \frac{2 - 3\sin\alpha}{6}g$$

b) Valoarea maximă a unghiului α rezultă din ecuația (1):

$$\mu \cdot 3P\cos\alpha = \frac{2P}{g}\left(\frac{2 - 3\sin\alpha}{6}\right)g + 3P\sin\alpha .$$

Știind că $\mu = \frac{2}{3}$, rezultă: $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{3}$, ecuație trigonometrică, din

care, prin ridicare la pătrat, se obține: $\sin 2\alpha = \frac{8}{9}$ sau $\alpha_{max} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{9} = 31^\circ 22'$

10. Un troliu de rază R = 2r (fig. 12.13), având greutatea 3Q şi raza de inerție $i = \sqrt{R \cdot r}$, este lăsat să cadă liber din poziția de repaus, asupra lui acționând şi forța din firul înfăşurat pe circumferința de rază 2r, în capătul căruia este fixată prisma 1 de greutate Q. Să se determine accelerația centrului de masă al troliului şi eforturile din fire.

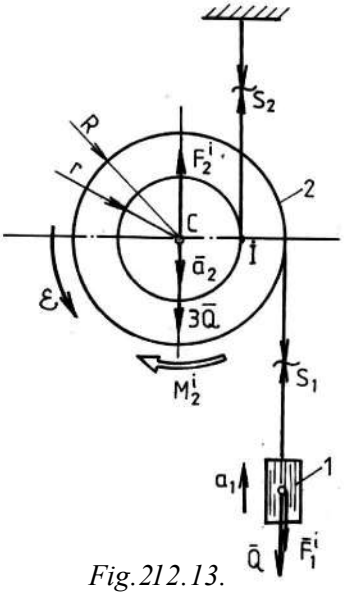


Fig.212.13.

Rezolvare:

Se izolează corpurile, înlocuindu-se legăturile interioare cu eforturile S_1 şi S_2. Se reprezintă toate forțele active, pasive şi de inerție.

Ecuațiile scalare de echilibru dinamic sunt:

Corpul 1:

$$\sum Y_i = 0 ; \qquad S_1 - Q - F_1^i = 0 ;$$

Corpul 2:

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 ; & S_2 - F_2^i - 3Q - S_1 = 0 ; \\ \sum M_c = 0 ; & S_2 r - S_1 2r - M_2^i = 0 ; \end{cases}$$

La aceste relații se adaugă expresiile:

$$a_2 = \varepsilon_2 \cdot r ; \quad F_1^i = \frac{Q}{g} a_1 ; \quad F_2^i = \frac{3Q}{g} a_2 ; \quad M_2^i = m_2 i^2 \varepsilon_2 = \frac{6Q r}{g} \cdot a_2 .$$

Eliminând eforturile S_1 şi S_2 rezultă accelerația $a_2 = a_1 = \frac{1}{6} g$

Eforturile din fire sunt: $S_1 = 1{,}5\ Q$ şi $S_2 = 4Q$

11. O placă dreptunghiulară de lungime *l*, lățime h şi greutate P se poate roti în jurul unui ax orizontal Ox, fără frecare. Placa formează unghiul a cu axul vertical AB, în jurul căruia se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω (φιγ. 12.14). Placa este menținută în echilibru prin intermediul unui arc de constantă k, perpendicular pe axa de rotație AB. În starea nedeformată a arcului placa formează unghiul α_0 cu axa AB. Să se determine reacțiunile dinamice din lagărele A şi B şi unghiul α. Aplicație numerică: *l* = 2m; h = 1m; k = 175 kN/m; ω = 20 rad/s; P = 10kN; α_0 =2° şi OA = *l*/3.

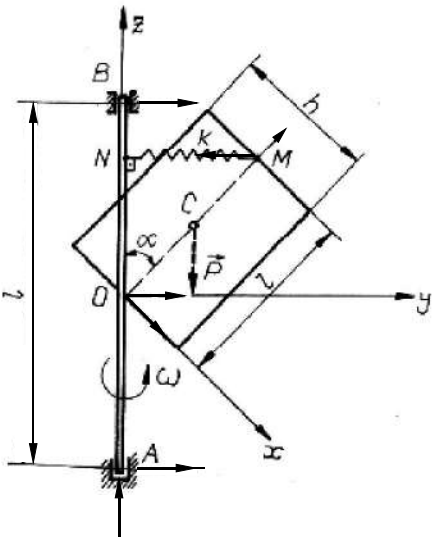


Fig.212.14.

Rezolvare:

Se calculează torsorul forțelor de inerție în polul O:

$$\tau_0^i \begin{cases} \vec{R}^i = -m\vec{a}_c = \dfrac{P}{g}\cdot\omega^2\cdot\dfrac{l}{2}\sin\alpha\,\vec{j} \text{ unde } \sin\alpha \approx \alpha \\ \vec{M}_0^i = -\dot{\vec{K}}_0 = -\dfrac{d}{dt}(-J_{yz}\,\omega\,\vec{j} + J_{zz}\,\omega\vec{k}) = -J_{yz}\,\omega^2\,\vec{i} = -\dfrac{Pl^2}{3g}\omega^2\,\alpha\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{k}} = 0;\ \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j} = -\omega\vec{i};\ \dot{\omega} = 0$$

Momentul cinetic este:

$$\vec{K}_0 = \left[\bar{\bar{J}}_0\right]\left[\vec{\omega}\right] = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = -J_{yz}\,\omega\vec{j} + J_{zz}\,\omega\vec{k}$$

Momentul de inerție centrifugal se calculează cu formula:

$$J_{yz} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2}\sin 2\alpha \approx (J_{z'} - J_{y'})\alpha = \frac{P l^2}{3g}\cdot\alpha$$

unde $J_{z'}$ şi $J_{y'}$ sunt momentele de inerţie faţă de axele proprii (vezi problema 2.2.2):

$$J_{y'} = \frac{P h}{12g};\quad J_{z'} = J_{x'} + J_{y'} = \frac{P}{g}\left(\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{12}\right)$$

Forţele active şi de inerţie fiind coplanare, $X_A = X_B = 0$. Ecuaţiile scalare de echilibru dinamic sunt:

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A + Y_B + \frac{P}{g}\omega^2\frac{l}{2}\alpha = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A - P = 0;$$

$$\sum M_{0xi} = 0; \qquad \frac{l}{3}Y_A - \frac{2l}{3}Y_B - \frac{P l^2}{3g}\omega^2\alpha = 0;$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii, rezultă:

$$Y_B = -\frac{P}{3g}\omega^2 l\alpha;\quad Y_A = -\frac{P}{6g}\omega^2 l\alpha;\quad Z_A = P$$

Forţa F din arcul de constantă k este: $F = -k\Delta y = -k l(\sin\alpha - \sin\alpha_0)$, dacă $\sin\alpha_0 \cong \alpha_0$, atunci $F = -k l(\alpha - \alpha_0)$.

Pentru determinarea unghiului α la echilibru dinamic, se va scrie o sumă de momente faţă de axa Ox, numai pentru placă:

$$\sum M_{0x} = 0;\quad F l\cos\alpha - P\frac{l}{2}a - \frac{P l^2}{3g}\omega^2\alpha = 0$$

Se aproximează $\sin\alpha \cong \alpha$, $\cos\alpha \cong 1$ şi rezultă:

$$k l(\alpha - \alpha_0)l - P\frac{l}{2}\alpha - \frac{P l^2}{3g}\omega^2\alpha = 0$$

de unde: $\alpha = \dfrac{k l\alpha_0}{k l - \dfrac{P}{2} - \dfrac{P l}{3g}\omega^2} = \dfrac{350}{78}\alpha_0 = 4{,}5\alpha_0 = 9^\circ$

Cu unghiul α stabilit se înlocuieşte $\sin 9^0 = 0{,}16$ în expresiile reacţiunilor dinamice, rezultând: $Y_B = -42{,}66$ kN ; $Y_A = -21{,}33$ kN ; $Z_A = 10$ kN

12. O placă materială de forma unui sfert de cerc de rază R, masă m şi greutate G, se află într-un plan vertical, articulată în O şi rezemată în A (fig. 12.15). Placa se roteşte în jurul axului vertical cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine pentru ce valoare a lui ω reacţiunea din A se anulează?

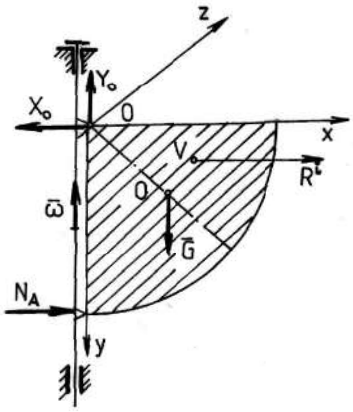


Fig.212.15.

Rezolvare:

Poziţia centrului de masă al plăcii faţă de sistemul de referinţă cu originea în O se determină cu relaţia cunoscută:

$$OC = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}R\frac{\sin 45^o}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}$$

$$x_c = y_c = OC\cdot\sin 45^o = \frac{4R}{3\pi}$$

Momentele de inerţie mecanice J_{ox}, J_{oy}, J_{xy} sunt:

$$J_{ox} = J_{oy} = \frac{mR^2}{4};\quad J_{xy} = \frac{mR^2}{2\pi}$$

Torsorul forţelor de inerţie faţă de polul fix O este:

$$\tau_0^i \begin{cases} \vec{R}^i = -\dot{\vec{H}} = -m\bar{a}_c = \dfrac{G}{g}x_c\,\omega^2\,\bar{i}; \\ \vec{M}_0^i = \dot{\vec{K}}_0 = -J_{xy}\,\omega\dot{\bar{i}} = -J_{xy}\,\omega^2\,\bar{k}, \text{ deoarece } \dot{\bar{i}} = \bar{\omega}\times\bar{i};\ \dot{\bar{j}} = 0 \end{cases}$$

dar

$$\vec{K}_0 = \bar{\bar{J}}_0\,\vec{\omega} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} = J_{xy}\,\omega\,\vec{i} - J_{yy}\,\omega\,\vec{j}.$$

Poziţia axei centrale a forţelor de inerţie se obţine aplicând teorema lui Varignon: $y_v\cdot R^i = M_0^i$, de unde: $y_v = \dfrac{M_0^i}{R^i} = \dfrac{J_{xy}\,\omega^2}{m\,x_c\,\omega^2} = \dfrac{J_{xy}}{m\cdot\frac{4R}{2\pi}} = \dfrac{3}{8}R$

Făcând sumă de momente în polul O, pentru $N_A = 0$, rezultă viteza unghiulară ω:

$$\sum M_0 = 0\,; \qquad -y_V \cdot R_i + x_c \cdot G = 0\,;$$

$$\frac{3}{8}\cdot R \cdot \frac{G}{g}\cdot\frac{4R}{3\pi}\cdot\omega^2 = \frac{4R}{3\pi}\cdot G\,, \text{ deunde } \omega^2 = \frac{8g}{3R}$$

13. O placă dreptunghiulară de masă m, cu dimensiunile din figura 12.16, este fixată de un ax vertical AB. Placa se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul axului vertical. Să se determine reacţiunile dinamice din lagărele A şi B.

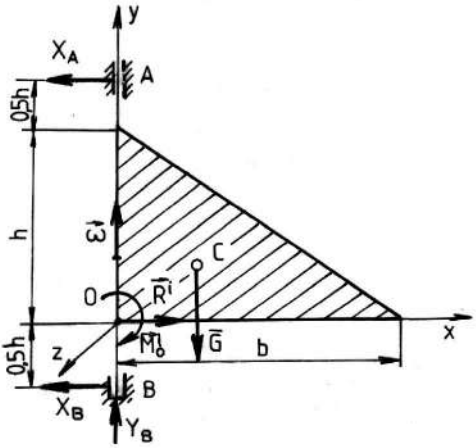


Fig.212.16.

Rezolvare:

Poziţia centrului de masă al plăcii este:

$$x_c = \frac{b}{3} \text{ şi } y_c = \frac{h}{3}$$

S-au determinat următoarele momente de inerţie mecanice:

$$J_{0x} = \frac{mh}{6}\,;\quad J_{0y} = \frac{mb^2}{6}\,;\quad J_{xy} = \frac{mbh}{12}$$

Torsorul forţelor de inerţie în polul O este:

$$\tau_0^i \begin{cases} \vec{R}^i = -\dot{\vec{H}} = -m\vec{a}_c = m x_c \omega^2 \bar{i} = m\frac{b}{3}\omega^2 \bar{i}; \\ \vec{M}_0^i = -\dot{\vec{K}} = +J_{xy}\,\omega\dot{\bar{i}} = -J_{xy}\,\omega^2\,\bar{k}\,, \text{ unde } \dot{\bar{i}} = \bar{\omega}\times\bar{i}\,;\ \dot{\bar{j}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{unde } \vec{K}_0 = \bar{\bar{J}}_0\,\vec{\omega} = \begin{bmatrix} J_{0x} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_{0y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{0z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} = -J_{xy}\,\omega\bar{i} + J_{0y}\,\omega\bar{j}\,;$$

Ecuaţiile scalare de echilibru dinamic sunt:

$$\sum X_i = 0 ; \qquad -X_A + X_B + R^i = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \qquad Y_B - G = 0 ;$$

$$\sum M_0 = 0 ; \qquad x_A \cdot 1{,}5h - x_B \cdot 0{,}5h - x_c G - M_0^i = 0 ;$$

Înlocuind datele cunoscute, sistemul devine:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{mb}{3}\omega^2 \\ 1{,}5x_A - 0{,}5x_B = \dfrac{mgb}{3h} + \dfrac{mbh}{12}\omega^2\dfrac{1}{h} \end{cases}$$

Rezultă: $x_B = \dfrac{5mb\omega^2}{12} - \dfrac{mgb}{3h}$; $y_B = G$; $x_A = \dfrac{mgb}{3h} - \dfrac{mb\omega^2}{12}$

14. Un tambur cu raza r = 0,05 m este ataşat unui disc cu raza R = 0,10 m (fig.12.17). Discul şi tamburul au împreună masa m = 6 kg şi o rază de inerţie i = 0,12 m. Un fir este înfăşurat pe tamburul de rază r şi tras cu o forţă F = 25 N. Dacă discul se rostogoleşte fără alunecare, să se determine: a) acceleraţia unghiulară a discului şi acceleraţia centrului său de masă; b) valoarea minimă a coeficientului de frecare la alunecare, compatibilă cu această mişcare.

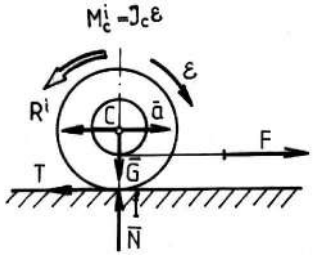


Fig.212.17.

Rezolvare:

Se reprezintă torsorul forţelor de inerţie faţă de centrul de masă, forţele active G şi P şi cele pasive, T şi N.

Ecuaţiile de echilibru dinamic sunt:

$$\sum X_i = 0 ; \qquad F - T - R^i = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \qquad N - G = 0 ;$$

$$\sum M_c = 0 ; \qquad TR - M_c^i - Fr = 0 ;$$

unde: $R^i = ma$; $M_c^i = J_c \varepsilon = i^2 m\varepsilon$; $\varepsilon = \frac{a}{R}$;

Înlocuind forța de aderență T din prima ecuație în ultima, rezultă accelerația centrului de masă:

$$a = \frac{FR(R-r)}{m(R^2+i^2)} = \frac{25 \cdot 0{,}10(0{,}10-0{,}05)}{6(0{,}10^2+0{,}12^2)} = 0{,}85 \, m/s^2 ;$$

La limită $T = \mu N$, din prima relație rezultă:

$$\mu = \frac{F-ma}{mg} = \frac{25-6 \cdot 0{,}85}{6 \cdot 8{,}9} = 0{,}372$$

12.4. PROBLEME PROPUSE

1. Un punct material de masă m face corp comun cu o roată de masă M şi rază R (fig. 12,18). Să se determine frecarea dintre roată şi sol, pentru ca aceasta să se rostogolească fără să alunece.

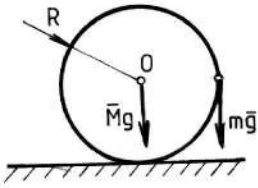


Fig.12.18.

R: $\mu = \frac{2m(M+m)}{M(3M+m)+2m^2}$

2. O placă pătrată de greutate G şi latură l, articulată în O, susținută de firul BC, este în repaus în poziția I. a) Să se determine reacțiunile în O, imediat după ruperea firului, precum şi reacțiunile după căderea în poziția II; b) Aceeaşi problemă pentru placa din figura 12.19, b.

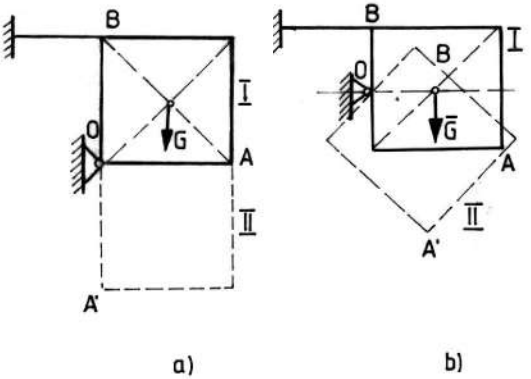


Fig.212-19.

R: a) $X_A = \frac{3G}{8}$; $Y_A = \frac{5G}{8}$; $X'_A = \frac{15G}{8}$; $Y'_A = \frac{17G}{8}$

b) $X_A = 0$; $Y_A = \frac{2G}{5}$; $X'_A = \frac{96}{10}$; $Y'_A = \frac{13G}{10}$

3. Între ce limite variază elementele încastrării, când pendulul cu fir de lungime l şi bila de greutate G oscilează sub 60^0, ca în figura 12.20 Să se verifice în poziția I prin solidificarea sistemului.

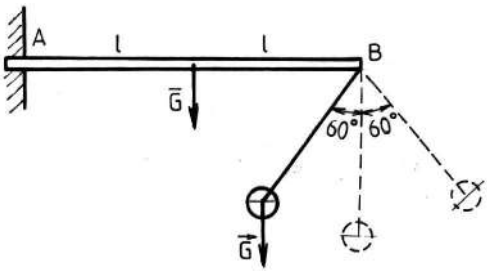


Fig.212.20

R:

I) $X_A = -\frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \frac{5G}{4}$; $M_A = \frac{3}{2}Gl$

II) $X_A = 0$; $Y_A = 3G$; $M_A = 5Gl$

III) $X_A = \frac{G\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \frac{5G}{4}$; $M_A = \frac{3}{2}Gl$

4. Într-un plan orizontal, un fir ABC (AB = BC = l = 2 m) este fixat în A şi trece peste un cui B (fig. 12.21). Din C se lansează un mobil cu viteza $v_0 = 12$ m/s. a) Să se determine tensiunea în fir şi timpul până ce firul este în poziția AD şi AE; b) Aceeaşi problemă în plan vertical.

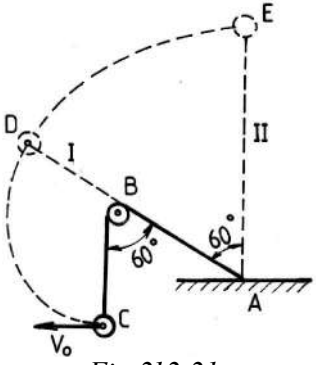


Fig.212.21.

R: a) $T_1 = 7{,}26G$; $t_1 = \frac{\pi}{9}$ sec.

$T_2 = 3{,}6G$; $t_2 = \frac{\pi}{9}$ sec.

b) $T_1 = 3{,}7G$; $T_2 = 1{,}6G$;
$T_3 = 0{,}1G$ (în pozitia AE)

5. Într-un plan orizontal sunt trei cuie A, B, C, formând vârfurile unui triunghi echilateral de latură l (fig 12.22). Legat în A şi înfăşurat în jurul celor trei cuie este un fir cu o bilă în capăt, de greutate G (la început este în A). Bila este lansată cu viteza v, perpendicular pe fir. Se cere tensiunea T în fir când acesta se desfăşoară. Se neglijează frecarea.

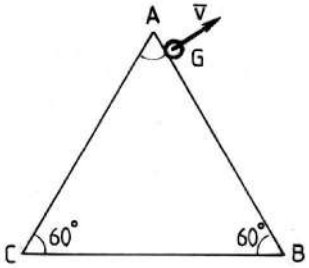


Fig.212.22

R: *2*$T_1 = \dfrac{G}{g}\dfrac{v^2}{l}$; $T_2 = \dfrac{T_1}{2}$; $T_3 = \dfrac{T_1}{3}$.

6. a) Să se determine tensiunile T_1 şi T_2 în barele 1 şi 2 care prind greutatea G de o bară AB, în jurul căreia sistemul se roteşte cu viteza unghiulară ω (AB = *l*); b) Aceeaşi problemă când bara AB este orizontală iar sistemul se roteşte în jurul ei; c) Sistemul se roteşte în jurul axei verticale ce trece prin A (fig. 12.23).

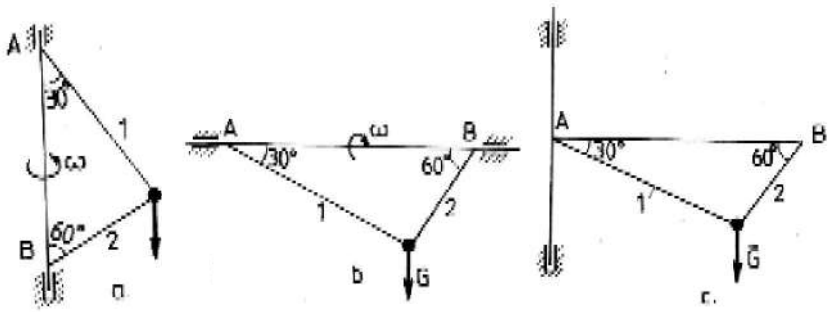


Fig.212.23

R: a) $T_1 = G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{l}{8g}\sqrt{3}\,\omega^2\right)$; $T_2 = G\left(\dfrac{3l\omega^2}{8g} - \dfrac{1}{2}\right)$

b) $T_1 = \dfrac{\sqrt{3}\,G l \omega^2}{8g} \mp \dfrac{G}{2}$; $T_2 = \dfrac{3G l \omega^2}{8g} \pm \dfrac{G\sqrt{3}}{2}$

c) $T_1 = \dfrac{G}{2} + \dfrac{3G\sqrt{3}\, l \omega^2}{8g}$; $T_2 = \dfrac{G\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3G l \omega^2}{8g}$

7. O bară omogenă de lungime l şi greutate G (fig. 12.24) este articulată la capătul O de axa verticală (D), în jurul căreia se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. Pentru ce valoare a vitezei unghiulare ω, reacţiunea normală din A se anulează?

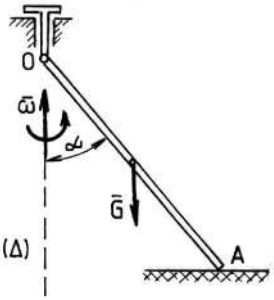


Fig.212.24

R: $\omega^2 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{g}{l \cos\alpha}$

8. O tijă omogenă de greutate P şi lungime *l*, este articulată la un capăt şi menţinută sub un unghi α, cu ajutorul unui fir BC (fig. 12.25). Bara se roteşte în jurul unui ax vertical cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine efortul static şi dinamic din firul BC. Aplicaţie numerică: P = 50 N; $\alpha = 45^0$; $l = \sqrt{2}$ m; ω = 3 rad/s.

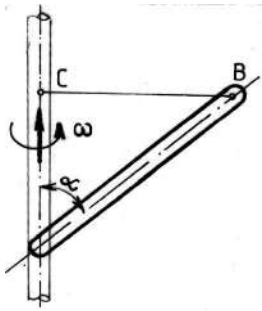


Fig.212.25

R: $T = P\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{l\omega^2}{3g}\sin\alpha\right)$

$T_{st} = 25$ N; $T_{din} = 40$ N.

9. Să se determine acceleraţiile corpurilor de greutate P şi Q, legate între ele printr-un fir trecut peste troliul 2 de raze r_1 şi r_2. Planul înclinat are unghiul α, iar frecările şi masa troliului se neglijează (fig. 12.26).

R: $a_1 = \dfrac{P r_1^2 - Q r_1 r_2 \sin\alpha}{P r_1^2 - Q r_2^2} g$; $a_3 = \dfrac{P r_1 r_2 - Q r_2^2 \sin\alpha}{P r_1^2 - Q r_2^2} g$;

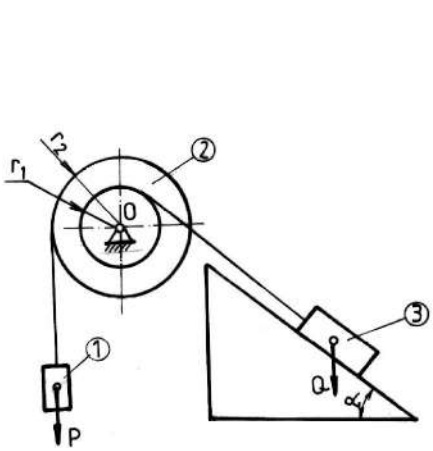


Fig.212.26

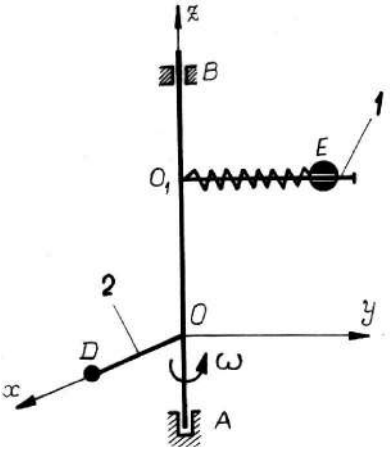


Fig.212.27

10. Punctul material E, de masă m_1 = 2 kg, alunecă fără frecare pe un ax orizontal 1, fiind legat de un arc de constantă k = 10 N/cm şi lungime l_0 = 20 cm, în stare nedeformată. Punctul material D, de masă m_2 = 3 kg, este fixat pe o altă bară 2 orizontală, perpendiculară pe axul vertical OO_1 care se roteşte cu o viteză unghiulară ω = 10 rad/s. Ştiind că $AO = OO_1 = O_1B = OD$ = 20 cm, calculaţi forţa din arcul deformat şi reacţiunile dinamice din lagărele A şi B (fig.12.27.

R: $X_A = -40$ N ; $Y_A = -\frac{100}{3}$ N ;

$X_B = -20$ N ; $Y_B = -\frac{200}{3}$ N . Farc = 100 N

11. Un disc omogen de rază r = 10 cm şi masă m_1 = 3 kg se roteşte în jurul unui ax vertical AB cu viteza unghiulară ω = 10 rad/s. Discul este menţinut sub un unghi α prin intermediul unui arc elicoidal de constantă k = 10 N/cm. La momentul iniţial, discul formează unghiul $\alpha_0 = 10^0$ iar arcul este nedeformat. Discul se poate roti în jurul axului orizontal OD, situat la distanţa r/2 faţă de centrul discului. Punctul material D de masă m_2 = 0,4

kg este situat pe acelaşi ax orizontal. Dacă AO = OB = 50 cm, să se calculeze unghiul α, forţa din arcul de constantă k şi reacţiunile dinamice din lagărele A şi B (fig. 12.28).

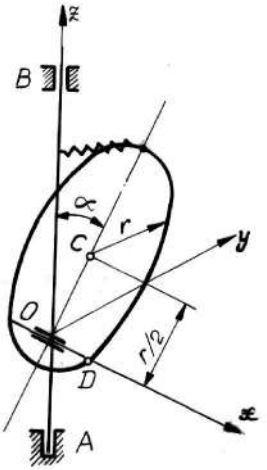


Fig.212.28

R:

$\alpha = 11{,}5^{\circ}$; $F_{arc} = 3{,}98$ N;

$X_A = -1{,}39$ N ; $Y_A = -0{,}91$ N ;

$X_B = -2{,}07$ N ; $Y_B = -2{,}11$ N ;

$Z_A = -33{,}32$ N ;

12. Un inel de diametru d = 30 cm şi masă m_1 = 3 kg este articulat în D, în capătul unei bare OD de lungime l_1 = 20 cm, perpendiculară pe axul vertical OE. Inelul este menţinut sub un unghi α faţă de verticală, prin intermediul unui arc având constanta de elasticitate k = 6 N/cm. În capătul barei de lungime l_2 = 25 cm se află greutatea K de masă $m_2 = 0{,}5$ kg. În poziţia iniţială, inelul avea poziţia verticală, iar arcul era nedeformat. Întregul ansamblu se roteşte în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă ω = 10 rad/s (v. fig. 12.29). Dacă AO = 40 cm şi OB = 60 cm, calculaţi: a) unghiul α pe care îl formează inelul cu verticala; b) forţa din arc; c) reacţiunile dinamice şi statice din lagărele A şi B.

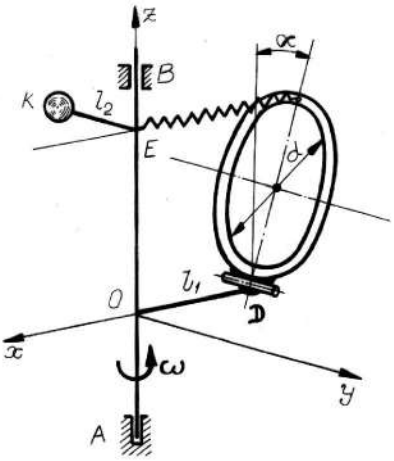


Fig.212.29

R:

a) $\alpha = 13{,}07^{\circ}$; $F_{arc} = 41{,}05$ N;

b) $X_A = 23{,}96$ N ; $Y_A = 2{,}52$ N ; $Z_A = 34{,}3$ N ;

$X_B = 46{,}3$ N ; $Y_B = 9{,}98$ N ;

13. O bară dreaptă 1 de lungime l_1 = 0,30 m este articulată în O_1 de o altă bară 2 orizontală de lungime l_2 = 0,05 m, sudată la rândul ei de un ax vertical AB în jurul căruia se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω = 10 rad/s (fig. 12.30). În capătul barei 1 de masă M = 10 kg se află punctul material D de masă m = 1 kg, legat de axul vertical prin intermediul unui arc de constantă k = 20 N/cm. Ştiind că AO = OB = 0,6 m, calculaţi: a) unghiul α pe care îl formează bara 1 (în poziţia iniţială bara era verticală şi arcul nedeformat); b) reacţiunile din articulaţia O_1; c) reacţiunile din lagărele A şi B.

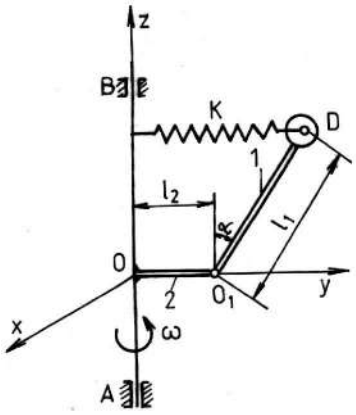


Fig.212.30

R: a) $\alpha = 4{,}2^{\circ}$;

b) $Y_{01} = -24{,}3$ N ; $Z_{01} = 107{,}8$ N ;

c) $Y_A = -18{,}6$ N ; $Y_B = -49{,}5$ N ; $Z_A = 107{,}8$ N ;
$X_A = X_B = 0$

14. O bară dreaptă 1 de masă m = 10 kg şi lungime l_1 = 0,30 m este articulată în O_1 de o altă bară dreaptă 2 de lungime l_2 = 0,10 m, sudată la rândul ei de un ax vertical AB, ce se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω_1 = 20 rad/s (fig. 12.31). La capetele barei 1 sunt fixate două arcuri de constante k_1 = 10 N/cm şi k_2 = 20 N/cm. În starea nedeformată a arcurilor, bara formează unghiul α = 5^0 cu axa verticală. Dacă OA = OB = 0,60 m, calculaţi: a) forţele din cele două arcuri; b) reacţiunile dinamice din

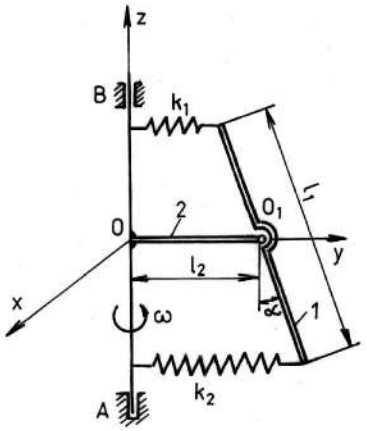


Fig.212.31

lagărele A şi B.

R: a) $\alpha = 9^{\circ}$; $F_1 = 10{,}5$ N ; $F_2 = 21$ N ;

b) $X_A = X_B = 0$;
$Y_A = -204$ N ; $Y_B = -196$ N ;
$Z_A = 98$ N ;

15. O bară cotită în unghi drept AOB, având cele două braţe egale AO = OB = l, articulată în O, cade din poziţia I în poziţia II şi apoi III. Să se determine reacţiunile din O în cele trei poziţii (12.32).

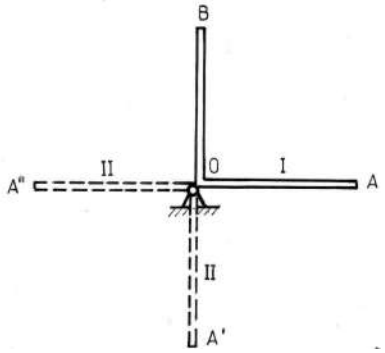


Fig.212.32

R:*2*a) $X_0 = \frac{3G}{8}$; $Y_0 = \frac{13G}{8}$;

b) $X_0 = -\frac{15G}{8}$; $Y_0 = \frac{25G}{8}$;

c) $X_0 = \frac{15G}{8}$; $Y_0 = \frac{25G}{8}$;

16. Corpurile A şi B, de mase m fiecare, sunt legate prin intermediul unor fire inextensibile, trecute peste scripeţii D şi E, de un cilindru omogen de masă 4m, ca în figura 1233. Să se determine acceleraţia centrului de masă al cilindrului şi valoarea minimă a coeficientului de frecare la alunecare dintre cilindru şi planul orizontal. Se neglijează masele scripeţilor D şi E.

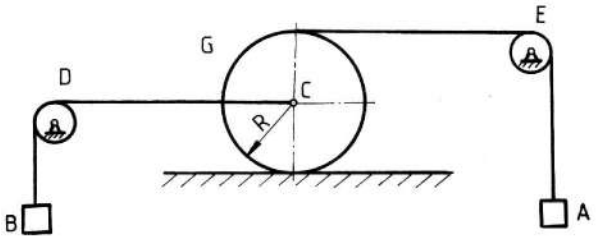


Fig.212.33

R: $a_c = \frac{1}{11}G$; $\mu = 0{,}159$.

17. Pentru sistemul de corpuri din figura 12.34, să se determine momentul motor M_m, astfel încât sistemul să demareze cu accelerația unghiulară ε_1. Se cunosc greutățile corpurilor P, Q, G, razele R_1, r_2, R_2 şi raza de inerție i_2 a troliului.

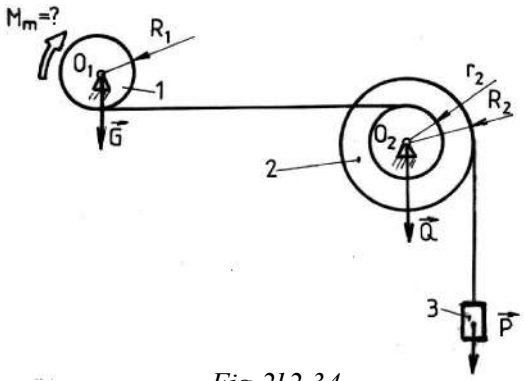


Fig.212.34

$$M_m = J_{red} \cdot \varepsilon_1 + P\frac{R_1 R_2}{r_2}, \quad \text{unde}$$

R: $J_{red} = \frac{G}{2g}R_1^2 + \frac{Q}{g}\left(\frac{R_1 i_2}{r_2}\right)^2 + \frac{P}{g}\left(\frac{R_1 R_2}{r_2}\right)^2$

18. Prisma A de masă m este legată prin intermediul unui fir inextensibil trecut peste scripetele B, de un cilindru D de rază R şi masă 2m ce se rostogoleşte pe un plan înclinat de unghi α (fig. 12.35). Neglijând frecarea de rostogolire şi frecarea în axul scripetelui B, să se determine: a) coeficientul minim de frecare de alunecare pentru ca cilindrul să se rostogolească fără alunecare; b) valoarea maximă a unghiului α, pentru care este posibilă rostogolirea fără alunecare, dacă $\mu = 0{,}3$.

R:

a) $\mu_{min} = \frac{1}{14}$;

b) $tg\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{-6+\sqrt{196\mu^2+35}}{1+14\mu}$;

$\alpha_{max} = 27^o\,6'$

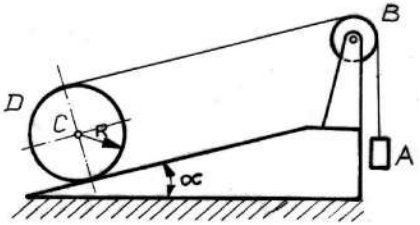


Fig.212.35

19. Pe cilindrul 1 de masă m_1 este înfăşurat un fir inextensibil, trecut peste scripetele 2 de masă m_2. În capătul firului este fixată o prismă 3 de masă m_3 (fig. 12.36). Cilindrul se rostogoleşte fără alunecare pe traversele 4 de masă m_4, care se deplasează pe un plan orizontal neted. Să se calculeze acceleraţia absolută a centrului de masă al cilindrului şi al corpului 3. De asemenea, să se determine eforturile din ramurile I şi II ale firului. În calcule se vor considera: $m_2 = 0{,}5m_1$; $m_3 = 0{,}75m_1$; $m_4 = 0{,}25m_1$

R:

$a_c = \frac{2}{9}g$; $a_3 = \frac{5}{9}g$;

$S_I = \frac{7}{36}m_1 g$; $S_{II} = \frac{71}{3}m_1 g$.

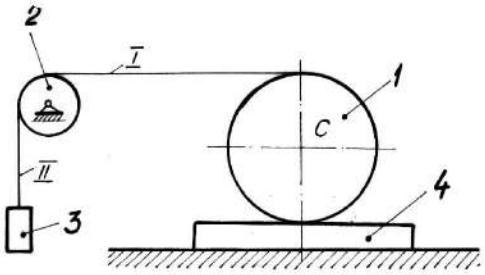


Fig.27.36

13

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

13.1. Dinamica punctului material liber 387
13.2. Dinamica punctului material cu legături 389
13.3. Dinamica punctului material în mişcare relativă 391
13.3.1.Ecuaţia fundamentală a mişcării relative 391
13.3.2. Cazul forţelor complementare nule. Reper inerţial 392
13.3.3. Repausul relativ 392
13.4. Probleme rezolvate 393
13.5. Probleme propuse 400

13

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

13.1. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Mişcarea punctului material în vid.

Mişcarea punctului material în vid (în aer cu neglijarea rezistenţei aerului) reprezintă un exemplu de mişcare a unui punct material liber.

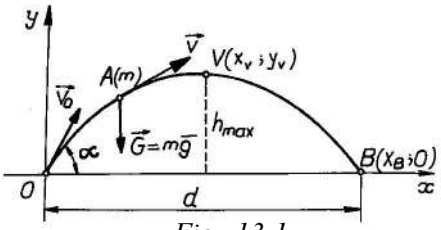


Fig. 13.1

Se consideră un punct material de masă m, aruncat de la suprafaţa Pământului cu viteza iniţială $\vec{v}_O$ sub unghiul α faţă de orizontală (fig.13.1). Se pune problema determinării traiectoriei unui astfel de punct, cunoscând forţele şi condiţiile iniţiale. Neglijând rezistenţa aerului şi a vântului lateral, mişcarea punctului este plană iar singura forţă care acţionează asupra lui este greutatea proprie $\vec{G} = m\vec{g}$. Se alege un sistem de referinţă fix Oxy, cu originea în poziţia iniţială a punctului material. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului se obţin proiectând pe axele sistemului de referinţă, ecuaţia fundamentală a dinamicii scrisă sub forma:

$$m\vec{a} = \vec{G}, \tag{13.1}$$

rezultând două ecuaţii scalare:

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -mg. \tag{13.2}$$

Integrând succesiv în raport cu timpul (13.2) se obţin proiecţiile vectorului viteză şi ale vectorului de poziţie:

$$\dot{x} = v_x = C_1;\ \dot{y} = v_y = -gt + C_2; \tag{13.3}$$

$$x = C_1 t + C_3; y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \qquad (13.4)$$

Ecuaţiile (13.4) reprezintă ecuaţile parametrice ale traiectoriei. Constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale:

$$\text{la } t = 0,\ x = 0; y = 0;\ \dot{x} = v_O \cos\alpha;\ \dot{y} = v_O \sin\alpha. \qquad (13.5)$$

Astfel relaţiile (13.3) şi (13.4) ne dau:

$$C_1 = v_O \cos\alpha; C_2 = v_O \sin\alpha; C_3 = 0; C_4 = 0. \qquad (13.6)$$

Introducând valorile constantelor în (13.4) rezultă:

$$x = v_O t \cos\alpha; y = -\frac{gt^2}{2} + v_O t \sin\alpha. \qquad (13.7)$$

Eliminând parametrul t între cele două ecuaţii, se obţine ecuaţia explicită a traiectoriei:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_O^2 \cos^2\alpha} + x\,\mathrm{tg}\alpha. \qquad (13.8)$$

Traiectoria este deci o parabolă care trece prin origine, având concavitatea în jos. Din punct de vedere balistic, interesează înălţimea maximă h_{max} şi bătaia d.

Bătaia se găseşte intersectând parabola (13.8) cu axa Ox, adică pentru y=0 rezultă:

$$d = x_B = \frac{2v_O^2 \cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha}{g} = \frac{v_O^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (13.9)$$

Relaţia (13.9) ne arată că pentru o viteză $\vec{v}_O$, dată bătaia maximă (distanţa de la punctul de lansare, la punctul de cădere), se obţine pentru un unghi de lansare α=45°. Deci, $d_{max} = v_O^2 / g$.

Înălţimea maximă atinsă de punctul material, faţă de orizontala ce trece prin punctul de lansare, pentru un unghi oarecare α, se obţine punând în ecuaţia (13.8) condiţia:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2gx}{2v_O^2 \cos^2\alpha} + \mathrm{tg}\alpha = 0, \text{ rezultă } x_v = \frac{v_O^2 \sin 2\alpha}{2g}. \qquad (13.10)$$

$$h_{max} = y(x_v) = \frac{v_O^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(v_y)_O^2}{2g}. \qquad (13.11)$$

Înălțimea maximă se obține la o abscisă egală cu jumătate din bătaie. Înălțimea maximă (13.11) se poate afla cunoscând componenta verticală a vitezei inițiale, indiferent de valoarea componentei orizontale a vitezei.

Coordonatele vârfului parabolei sunt: $V\left(v_O^2 \sin 2\alpha / 2g; v_O^2 \sin \alpha / 2g\right)$.

Conform relației (13.11) rezultă că la o viteză inițială constantă, pentru un unghi de lansare $\alpha=90^o$, rezultă înălțimea maximă atinsă de punctul material:

$$y_{max} = \frac{v_O^2}{2g}, (\sin \alpha = 1), \qquad (13.12)$$

adică, când punctul este lansat pe verticală.

13.2. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL CU LEGĂTURI

Dinamica punctului material pe cercul vertical.

Se consideră (fig.13.2) un punct material de masă m, lansat din poziția A_o cu viteza inițială $\vec{v}_O$ pe cercul vertical de rază R.

Dacă punctul A este legat prin intermediul unui fir de centrul O, legătura este unilaterală, iar dacă el se mişcă în interiorul unui tub de rază R, legătura este bilaterală.

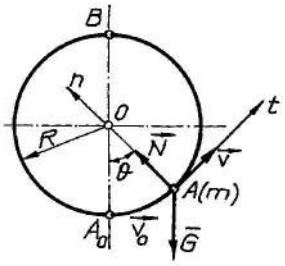


Fig.13.2

Se pune problema determinării mişcării (a vitezei funcție de poziție) şi a reacțiunii normale N, pe cercul vertical.

Traiectoria fiind circulară, se poate utiliza sistemul de coordonate naturale. Ecuația fundamentală a dinamicii este:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \qquad (13.13)$$

Asupra punctului acționează două forțe $\vec{G}$, greutatea punctului şi $\vec{N}$, reacțiunea normală. Forțele de frecare se neglijează.

Proiectând ecuația vectorială (13.13) pe axele sistemului de referință, rezultă ecuațiile scalare:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta; \tag{13.14}$$

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta. \tag{13.15}$$

Din prima ecuație (13.14) se obține legea vitezei, dacă se derivează în raport cu variabila θ şi se ține seama de dθ/dt=v/R:

$$m\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -mg\sin\theta, \text{ sau } \int_{v_O}^{v} vdv = -gR\int_{0}^{\theta}\sin\theta d\theta,$$

sau $\frac{v^2}{2} - \frac{v_O^2}{2} = +gR(\cos\theta - 1)$., rezultă

$$v^2 = v_O^2 - 2gR(1-\cos\theta). \tag{13.16}$$

Deci, pe măsură ce unghiul θ creşte, viteza lui se micşorează.

Pentru a afla unghiul la care viteza se anulează, se pune condiția ca viteza să se anuleze v = 0, în relația (13.16). Rezultă:

$$\cos\theta_v = 1 - \frac{v_O^2}{2gR}. \tag{13.17}$$

Din ecuația a doua (13.15) se obține reacțiunea N în funcție de unghiul θ şi v_O.

$$N = \frac{mv_O^2}{R} - mg(2-3\cos\theta). \tag{13.18}$$

Punând condiția ca reacțiunea normală N să fie zero, se obține din (13.18) unghiul pentru care se anulează aceasta:

$$\cos\theta_N = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{v_O^2}{2gR}\right) = \frac{2}{3}\cos\theta_V. \tag{13.66}$$

13.3. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL ÎN MIŞCARE RELATIVĂ

13.3.1. Ecuaţia fundamentală a mişcării relative

Faţă de un sistem de referinţă presupus fix, ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material stabilită de Newton este:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{13.20}$$

unde $\vec{a}$ reprezintă acceleraţia absolută a punctului material.

Uneori în aplicaţiile tehnice este necesar să se studieze mişcarea unui corp, asimilat cu un punct material faţă de un sistem de referinţă mobil.

În cinematică s-a stabilit relaţia după care se compun acceleraţiile în mişcarea relativă a punctului:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c. \tag{13.21}$$

Înlocuind relaţia (13.21) în (13.20) rezultă:

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c) = \vec{F},$$

sau

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_t) + (-m\vec{a}_c). \tag{13.22}$$

În expresia (13.22) apar două forţe de inerţie complementare, care se însumează vectorial cu rezultanta $\vec{F}$ a forţelor date şi de legătură ale punctului. Acestea sunt: $-m\vec{a}_t = \vec{F}_t^i$, forţa de inerţie de transport şi $-m\vec{a}_c = \vec{F}_c^i$, forţa de inerţie Coriolis. Cu acestea, **ecuaţia fundamentală a mişcării relative** (13.22) devine:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_t^i + \vec{F}_c^i. \tag{13.23}$$

Comparând cele două ecuaţii fundamentale (13.20) şi (13.23), se constată că în cazul când mişcarea se raportează la un reper mobil, pe lângă forţele exterioare date şi de legătură trebuie considerate şi forţele de inerţie de transport şi Coriolis.

13.3.2. Cazul forţelor complementare nule. Reper inerţial

O problemă de mare interes practic este aceea de a cerceta dacă, şi în ce condiţii există repere mobile faţă de care ecuaţia fundamentală a mişcării punctului material, se scrie la fel ca şi faţă de un sistem de referinţă fix.

Pentru aceasta, condiţiile ce trebuiesc îndeplinite sunt ca: acceleraţia de transport $\vec{a}_t$ şi acceleraţia Coriolis $\vec{a}_c$, să fie nule.

Acceleraţia de transport şi acceleraţia Coriolis sunt nule, atunci când sistemul de referinţă mobil are o mişcare de **translaţie, rectilinie şi uniformă** $\left(\vec{\omega}=0, a_t^{\nu}=0 \text{ şi } a_t^{\tau}=0\right)$.

Aceste sisteme de referinţă, faţă de care ecuaţia fundamentală a punctului material în mişcare relativă are aceeaşi formă ca şi faţă de un reper fix, se numesc **sisteme inerţiale.**

13.3.3. Repausul relativ

Repausul relativ poate fi considerat un caz particular al mişcării relative, când punctul material este în repaus faţă de sistemul mobil, dar în mişcare o dată cu acesta faţă de sistemul fix. Într-o asemenea situaţie, viteza şi acceleraţia relativă sunt nule.

Având în vedere expresia forţei de inerţie Coriolis:

$$\vec{F}_c^{\,i}=-2m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_r\right), \tag{13.24}$$

precum şi ecuaţia fundamentală a mişcării relative (13.23), rezultă pentru condiţia de repaus relaţia:

$$\vec{F}+\vec{F}_t^{\,i}=0, \tag{13.25}$$

adică forţele date şi de legătură, împreună cu forţa de inerţie de transport formează un sistem de forţe în echilibru. Relaţia (13.25) reprezintă condiţia de echilibru relativ a punctului material.

În tehnică problema repausului relativ se întâlneşte adeseori în studiul regulatorilor.

13.4. PROBLEME REZOLVATE

1. Un punct material de masă m începe să se mişte în vid, sub influenţa unei forţe variabile F (t) reprezentată grafic în figura 13.3. Ştiind că a=const.>0, b= const.>0 şi că forţa F (t) nu-şi schimbă direcţia, să se determine legea de mişcare x (t) a punctului material.

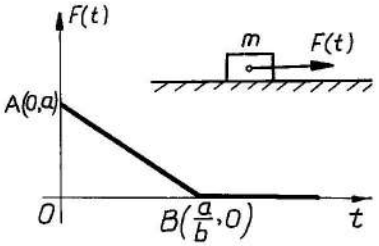


Fig. 13.3

Rezolvare. Forţa variabilă F (t) se modifică după legea:

$$F(t)=\begin{cases} a-bt;\ \text{pentru } 0\le t\le a/b, \\ 0,\ \text{pentru } t>a/b. \end{cases}$$

a) Pentru $0\le t\le a/b,$ ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material este:

$$m\ddot{x}=a-bt \text{ sau } \ddot{x}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}t. \qquad (1)$$

Integrând de două ori relaţia (1) rezultă:

$$\dot{x}=\frac{a}{m}t-\frac{b}{2m}t^2+C_1, \text{ pentru } t=0,\ \dot{x}=0,\ C_1=0.$$

$$x=\frac{a}{2m}t^2-\frac{b}{6m}t^3+C_2, \text{ pentru } t=0,\ x=0,\ C_2=0.$$

Legea de mişcare x (t) este:

$$x(t)=\frac{(3a-bt)}{6m}t^2, \text{ pentru } t\le a/b. \qquad (2)$$

$$\text{Pentru } t=a/b \text{ rezultă } x_B=\frac{a^3}{3mb^2}. \qquad (3)$$

b) Pentru t>a/b, ecuaţia fundamentală a dinamicii este:

$m\ddot{x} = 0, \quad (4)$

integrând de două ori rezultă:

$\dot{x} = C_1$, pentru $t = a/b$, $\dot{x} = \frac{a^2}{2mb^2}$, iar $C_1 = \frac{a^2}{2mb}$.

$x = \frac{a^2}{2mb}t + C_2$, pentru $t = a/b$, $x\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^3}{3mb^2}$, iar $C_2 = \frac{a^3}{6mb^2}$,

deci, $x(t) = \frac{a^2}{2mb}t + \frac{a^3}{6mb^2}$.

2. O barcă de masă m începe să se deplaseze în linie dreaptă (fig.13.4) pe suprafața unui lac cu viteza $\vec{v}_O$, învingând rezistența apei. La un moment dat, motorul bărcii se opreşte. Cunoscând forța de rezistență a apei de forma $\vec{R} = -k\vec{v}$,

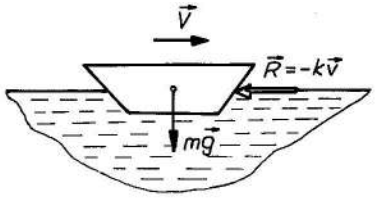


Fig.13.4

unde $\vec{v}$ este viteza bărcii iar k = const > 0, m = 48kg şi v_O =10 m/s, să se determine: a) coeficientul k al rezistenței apei, dacă după parcurgerea a 50 metri, viteza bărcii devine 5 m/s şi de asemenea găsiți timpul în care barca a parcurs această distanță; b) distanța maximă pe care o parcurge barca şi timpul necesar parcurgerii acestei distanțe.

Rezolvare. a) Ecuația fundamentală a dinamicii este:

$m\ddot{x} = -k\dot{x}$ sau $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0. \quad (1)$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale:

$r^2 + \frac{k}{m}r = 0$ cu soluțiile $r_1 = 0$; $r_2 = -\frac{k}{m}$.

Soluția ecuației diferențiale este:

$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}$.

Din condițiile inițiale t = 0; x = 0 şi $\dot{x} = v_O$, rezultă constantele de integrare:

$C_1 = \frac{m}{k}v_O$ şi $C_2 = -\frac{m}{k}v_O$, deci $x = \frac{m}{k}v_O\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ iar viteza va fi

$v = v_O e^{-\frac{k}{m}t}$. (2)

Punând condițiile din enunțul problemei, rezultă:

$$50 = \frac{48}{k}\cdot 10\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \text{şi } 5 = 10e^{-\frac{k}{m}t}, \quad (3)$$

prin eliminarea lui $e^{-\frac{k}{m}t}$ rezultă k = 4,8 N. s/m.

Din condiția a doua a relației (3), prin logaritmare rezultă timpul:

$$-\frac{k}{m}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ deci } t = \frac{m}{k}\ln 2 = 10\ln 2. \qquad (4)$$

b) Legea orară (2) în acest caz are expresia:

$x = 100\left(1 - e^{-0,1t}\right)$ de unde $x_{max} = \lim_{t\to\infty} 100\left(1 - e^{-0,1t}\right) = 100\text{m}.$

Distanța maximă parcursă de barcă după oprirea motorului este de 100 metri într-un timp (teoretic) infinit.

3.3Un punct material se deplasează sub acțiunea unei forțe centrale de atracție egală cu $\vec{F} = -10m/\rho^3\vec{e}_\rho$, unde m este masa punctului şi r raza polară (fig. 13.5). Punctul pleacă de pe axa polară la distanța ρ_O=1 m cu o viteză inițială v_O =2 m/s, înclinată față de orizontală cu unghiul $\alpha = 45^\circ$. Aplicând ecuația lui Binet să se găsească ecuația traiectoriei $\rho = \rho(q)$, ştiind că mişcarea se realizează cu viteză areolară constantă.

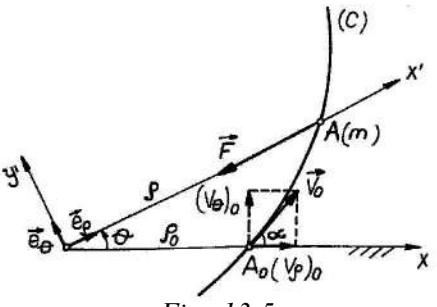


Fig. 13.5

Rezolvare. Înlocuind expresia forței de atracție F în ecuația lui Binet (13.45) rezultă:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}=\frac{10}{\rho C^2}, \qquad (1)$$

în care constanta ariilor C se determină cu relația (13.39):

$$C = v_O \rho_O \sin\alpha = 1\cdot 2\cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}. \quad (2)$$

Înlocuind valoarea constantei $C=\sqrt{2}$ în (1) rezultă ecuația diferențială a mișcării punctului.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{4}{\rho}=0. \quad (3)$$

Ecuația caracteristică $r^2-4=0$ are soluțiile $r_1=+2;\ r_2=-2.$

Soluția ecuației diferențiale este: $\frac{1}{\rho}=C_1e^{-2\theta}+C_2e^{+2\theta}.$

Ecuația traiectoriei este: $\rho=\frac{1}{C_1e^{-2\theta}+C_2e^{+2\theta}}, \qquad (4)$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare ce se determină din condițiile inițiale: $t=0,\theta=0,\rho_O=1,(v_\rho)_O=\sqrt{2},(v_\theta)_O=\sqrt{2}.$

Punând condițiile inițiale în relația (4) rezultă:

$$1=\frac{1}{C_1+C_2},\ \text{deci}\ C_1+C_2=1, \qquad (5)$$

şi $v_\rho=\dot{\rho}=-\frac{\left(-2C_1e^{-2\theta}+2C_2e^{+2\theta}\right)\dot{\theta}}{\left(C_1e^{-2\theta}+C_2e^{+2\theta}\right)^2}, \qquad (6)$

unde $\dot{\theta}=\frac{C}{\rho^2}=\frac{\rho_O v_O\sin\alpha}{\rho^2}$, comform relației (13.40).

Punând condițiile: q = 0, r = 1, $v_O = 1$ în relația (6) rezultă:

$$\left(v_\rho\right)_O = \sqrt{2} = \frac{\left(2C_1 - 2C_2\right)}{\left(C_1 + C_2\right)^2}\sqrt{2}, \text{ deci } C_1 - C_2 = \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Din (5) şi (7) se obțin constantele $C_1 = 3/4$ şi $C_2 = 1/4$.

În final ecuația traiectoriei punctului în coordonate polare este:

$$\rho = \frac{4}{3e^{-2\theta} + e^{+2\theta}}.$$

4. Cu ce viteză $\vec{v}_O$ trebuie să lansăm un punct material de masă m pe cercul vertical de rază R, astfel încât parabola descrisă după desprinderea punctului de cerc, să treacă prin centrul O al cercului. Se neglijează frecarea dintre punctul material şi cerc, precum şi rezistența aerului (fig. 13.6).

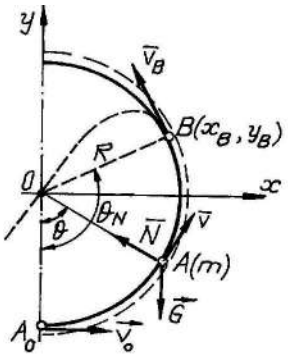


Fig. 13.6

Rezolvare. Asupra punctului acționează două forțe: $\vec{G}$ greutatea proprie şi $\vec{N}$ reacțiunea normală.Condiția de desprindere în punctul B, este ca reacțiunea normală $\vec{N}$ să se anuleze.

Unghiul corespunzător punctului de desprindere este dat de relația (13.66):

$$\cos\theta_N = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{v_O^2}{2gR}\right). \qquad (1)$$

Din (1) rezultă:

$$2gR - v_O^2 = 3gR\cos\theta_N. \qquad (2)$$

Viteza în punctul B este dată de relația (13.63):

$$v_B^2 = v_O^2 - 2gR + 2gR\cos\theta_N. \qquad (3)$$

Înlocuind relația (2) în (3) rezultă:

$$v_B^2 = -3gR\cos\theta_N + 2gR\cos\theta_N = -gR\cos\theta_N. \quad (4)$$

După desprinderea de cerc, punctul material descrie o parabolă. Ecuațiile parametrice ale traiectoriei în sistemul Oxy sunt:

$$x = C_1 t + C_2; y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4, \quad (5)$$

unde constantele de integrare C_1, C_2, C_3 şi C_4 se determină din condițiile inițiale:

$$\text{la } t = 0; x = x_B = R\sin\theta_N; y = y_B = -R\cos\theta_N; \quad (6)$$

$$\dot{x} = v_B\cos\theta_N; \dot{y} = +v_B\sin\theta_N.$$

Înlocuind condițiile (6) în (5) rezultă ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$x = R\sin\theta_N + v_B t\cos\theta_N; y = -\frac{gt^2}{2} + v_B t\sin\theta_N - R\cos\theta_N. \quad (7)$$

Punând condiția ca x = 0, y = 0 şi eliminând timpul în (6) rezultă:

$$v_B^2 = -\frac{gR\sin^2\theta_N}{2\cos\theta_N}. \quad (8)$$

Înlocuind (4) în (8) rezultă $\cos^2\theta_N = \frac{1}{3}$ deci $\cos\theta_N = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. (9)

Înlocuind valoarea lui $\cos\theta_N$ în (2) rezultă viteza inițială:

$$v_O^2 = gR\left(2+\sqrt{3}\right)$$

5. Să se studieze mişcarea relativă a unui manşon de masă m, de-a lungul unei tije rectilinii care se roteşte uniform într-un plan orizontal, cu viteza unghiulară w_o (fig.13.7).

Rezolvare. Asupra manşonului acționează greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$ reacțiunea normală $\vec{N}$, forțele complementare de transport $\vec{F}_t^i$ şi respectiv Coriolis $\vec{F}_c^i$. Ecuația vectorială ce descrie mişcarea manşonului M de-a lungul barei OA, conform (13.72)este:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c^i + \vec{F}_t^i. \qquad (1)$$

Expresiile forțelor complementare sunt:

$$\vec{F}_c^i = -2m\vec{\omega}_O \times \vec{v}_r = -2m\omega_O \dot{x}\vec{j};$$

$$\vec{F}_t^i = mx\omega_O^2 \vec{i}.$$

Proiectând ecuația (1) pe axa mobilă Ox, obținem:

$$m\ddot{x} = +mx\omega_O^2 \text{ sau } \ddot{x} - \omega_O^2 x = 0. \qquad (2)$$

Integrând ecuația de mişcare (2) rezultă soluția:

$$x = C_1 e^{\omega_O t} + C_2 e^{-\omega_O t}. \qquad (3)$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale:

$$\text{la } t = 0; x = x_O; \dot{x} = 0 \text{ rezultă : } x_O = C_1 + C_2;$$

de unde $C_1 = C_2 = \frac{x_O}{2}$. Legea de mişcare va fi: $x = x_O ch\omega_O t$.

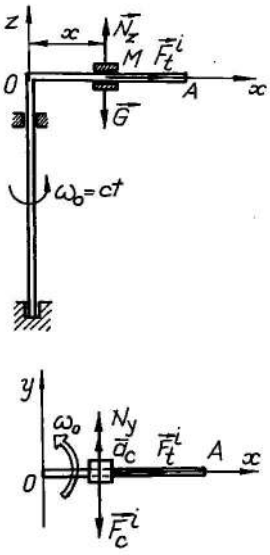


Fig.13.7

Reacțiunea tijei are componentele pe axele Oy şi Oz, egale cu:

$$N_y = F_c^i = 2m\omega\dot{x} = 2m\omega_O^2 x_O sh\omega_O t;$$

$$N_z = mg.$$

6. Un vas conic având unghiul la vârf 2a se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară w = const. (fig.13.8). În interiorul vasului se află în repaus relativ o bilă de masă m. Să se determine poziția de repaus relativ (prin înălțimea h) şi reacțiunea normală N din partea peretelui.

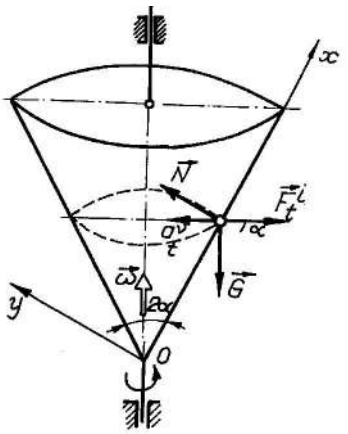


Fig.13.8

Rezolvare. Asupra punctului

acţionează forţele $\vec{G}, \vec{N}$ şi $\vec{F}_t^i$.

Ecuaţia de repaus relativ este:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_t^i = 0. \quad (1)$$

care proiectată pe sistemul de axe mobil Oxy conduce la:

$$\begin{cases} mh(tg\alpha)\omega^2 \sin\alpha - mg\cos\alpha = 0; & (2) \\ N - mg\sin\alpha - mhtg\alpha\omega^2\cos\alpha = 0. & (3) \end{cases}$$

Din ecuaţia (2) rezultă:

$$h = \frac{g}{\omega^2 tg^2\alpha},$$

iar din ecuaţia (3):

$$N = mg\sin\alpha + mg\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

13.5. PROBLEME PROPUSE

1. Punctul material de masă m începe să se mişte din starea de repaus sub acţiunea forţei F(t) de direcţie constantă. Mărimea acestei forţe F(t) = a – bt, unde $a = const > 0$ şi $b = const > 0$. Să se determine timpul şi distanţa parcursă de punct până la schimbarea direcţiei mişcării.

R: $t_1 = \frac{2a}{b}$; $s(t_1) = \frac{2a}{3m}\left(\frac{a}{b}\right)^2$

2. Corpul de masă m, fixat la extremitatea unui arc nedeformat, se află în repaus pe un plan orizontal neted. Axa arcului este orizontală. La un moment dat (t = 0), corpului i se imprimă viteza v_0, de-a lungul axei arcului. Forţa de elasticitate a arcului, în funcţie de deformaţiile sale l, este de forma: $F = k \cdot \lambda^3$, unde $k = const > 0$. Să se determine în cazul cărei deformaţii a arcului viteza corpului se va diminua de n ori în

comparație cu viteza sa inițială.

R: $\lambda = \sqrt{\dfrac{2m \cdot v_0^2 (n^2 - 1)}{k \cdot n^2}}$

3. Un corp de masă m, fixat la extremitatea unui arc nedeformat (fig. 13.9), este pus în mişcare rectilinie pe un plan orizontal neted cu viteza inițială v_0, îndreptată de-a lungul axei arcului. Forța din arc este proporțională cu deformația arcului λ, adică $F = k \cdot \lambda$, unde $k = \text{const} > 0$. În paralel cu arcul este fixat un amortizor, iar forța de rezistență a amortizorului este $R = -c \cdot v^2$ unde v este viteza pistonului, iar $c = \text{const} > 0$. Să se găsească viteza inițială a masei m, pentru ca ea să parcurgă spațiul *l*.

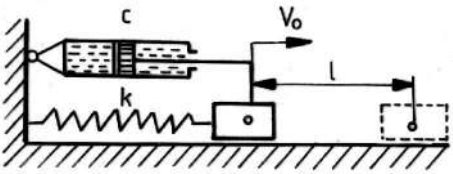


Fig. 13.9

R: $v_0 = \sqrt{\dfrac{k \cdot m}{2c^2}} \left[1 + \left(\dfrac{2cl}{m} - 1 \right) e^{\frac{2cl}{m}} \right]$

4. Glisorul 1 şi corpul 2 de masă m, ataşat de el cu ajutorul unui arc elicoidal având constanta k, se găsesc în stare de repaus pe un plan înclinat neted, care formează un unghi α cu orizontala (fig. 13.10). La un moment dat (t = 0), glisorul începe să se mişte de-a lungul planului cu viteza constantă u, comprimând arcul şi punând în mişcare corpul 2 de masă m. În timpul mişcării corpul întâmpină o forță de rezistență a mediului, proporțională cu viteza lui, de forma $\vec{R} = -c\vec{v}$, unde $c = \text{const} > 0$ considerând originea pentru coordonata x, poziția de repaus a corpului , să se determine ecuația de mişcare pe planul înclinat. Se va nota:

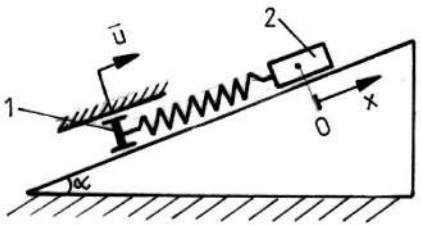


Fig. 13.10

$k/m = p^2$ iar $c/m = 2p$.

R: $x(t) = u\,t - \frac{2u}{p} + \frac{2u}{p}(1 + p\,t)e^{-pt}$

5. Un cilindru circular drept de masă m se cufundă, rămânând în poziție verticală, într-un lichid a cărui densitate este ρ (vezi figura 13.11). La momentul inițial cilindrul aflat în repaus, iar baza sa inferioară atingea suprafața lichidului. Înălțimea cilindrului este h, iar aria suprafeței secțiunii transversale este A. Neglijând forțele de rezistență, iar masa considerând că este $m = \rho \cdot A \cdot h$, să se determine viteza cilindrului în acel moment când baza sa superioară coincide cu suprafața lichidului.

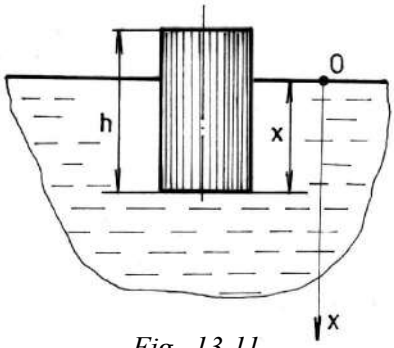


Fig. 13.11

R: $v = \sqrt{g\,h}$

6. O roată de rază R, situată la înălțimea H deasupra solului (fig. 13.12), se roteşte cu viteza unghiulară ω. De roată se desprinde o picătură de apă care atinge solul în punctul B, sub centrul roții. Să se determine timpul de cădere al picăturii şi să se stabilească punctul A din care s-a desprins picătura.

R :

$$t = \frac{\sqrt{2\left(\omega^2 R^2 + g\,h - R\sqrt{\omega^4 R^2 + 2g\,H\omega^2 + g^2}\right)}}{g}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \omega \cdot t$$

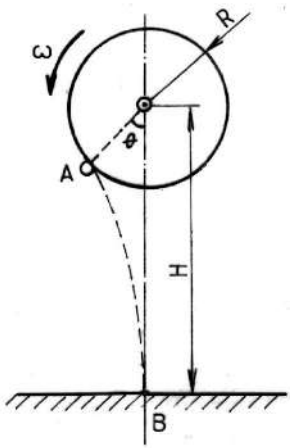


Fig. 13.12

7. O cutie de masă m = 50kg coboară pe un plan înclinat ($\alpha = 60^o$) cu frecare $\mu = 1/\sqrt{3}$ plecând din repaus (fig. 13.13). După ce parcurge distanța $l = 5\sqrt{3}$ întâlneşte un arc de constantă k. Să se determine: a) viteza cu care cutia întâlneşte arcul; b) legea mişcării cutiei după ce întâlneşte arcul, presupunând că momentul întâlnirii corespunde la t = 0; c)constanta k astfel încât deformația maximă a arcului să fie x_m = 0,5m.

R: a) $v = \sqrt{2gl(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 10\,m/s$

b) $x = \frac{a_1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \frac{v_B}{\omega}\sin\omega t$

unde $a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha);\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c) $k = \frac{m}{x_m^2}\left[v_B^2 + 2g x_m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right] =$

$= 2000\,N/m$

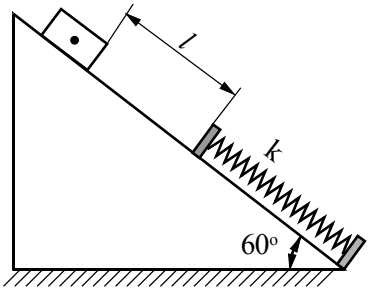


Fig. 13.13

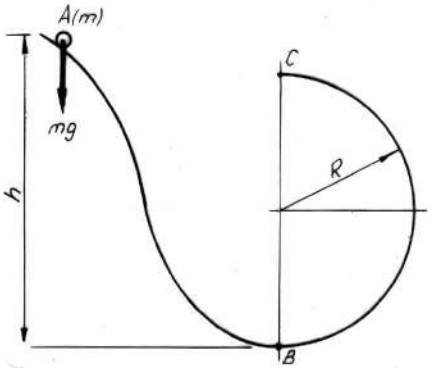


Fig. 13.14

8. De la ce înălțime h dăm drumul unui punct material de masă m, pentru ca el să parcurgă traseul ABC şi să treacă de C. Pe zona BC se înscrie pe un cerc de rază R (fig. 13.14).

R: $h \geq \frac{5}{2}R$

9. Un punct material de masă m este lansat pe verticală din poziția A cu viteza inițială v_0 şi se înscrie pe traiectoria ABC (fig. 13.15). Se cere: a) viteza cu care trebuie lansat punctul pentru reacțiunea în C să se anuleze; b) neglijând frecările şi rezistența aerului, la ce distanță d va cădea?

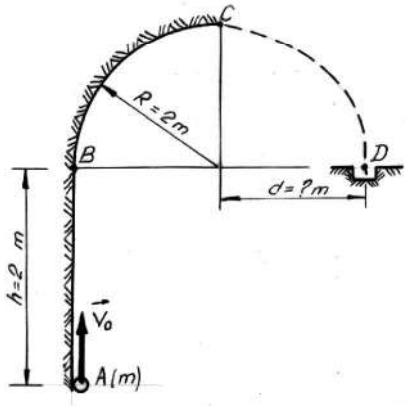


Fig. 13.15

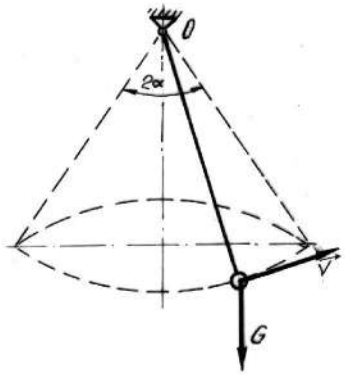


Fig. 13.16

R: $v_0 = 10\,m/s \quad d = 8\,m$

10. Un punct material M, de greutate G = 10N, este suspendat de un fir OM = 30cm fixat în O (13.16). Punctul material se roteşte în jurul axei verticale pe o traiectorie circulară, iar vârful OM descrie un con cu unghiul la vârf $2\alpha = 120^o$. Să se determine viteza $\vec{v}$ a punctului material şi tensiunea din fir.

R: v = 210 cm/s
T = 20 N

11. Un punct material de masă m se află pe un cerc vertical de rază R = 1m. Cu ce viteză v_A trebuie lansat, pentru ca el să se desprindă de pe un

cerc sub un unghi $\theta = 30^o$ (fig. 3.17). Dacă se lansează în vid, la ce distanță d față de baza semicercului va cădea?

R: $v_A \cong 2{,}46\,m/s$

$d \cong 1{,}9\,m$

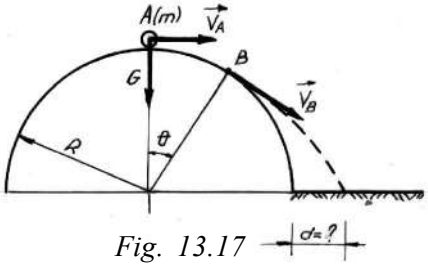


Fig. 13.17

12. Un punct material se deplasează sub acțiunea unei forțe centrale de atracție egală cu $F = -10\,m/\rho^3$, plecând de pe axa polară la distanța $\rho_0 = 1$ m, cu viteza inițială $v_0 = 2$ m/s, înclinată față de orizontală cu unghiul $\alpha_0 = 45^o$. Aplicând ecuația lui Binet, să se găsească ecuația traiectoriei știind că viteza areolară e constantă (fig. 13.18).

Răspuns: $\rho = \dfrac{4}{3e^{-2\theta} + e^{2\theta}}$

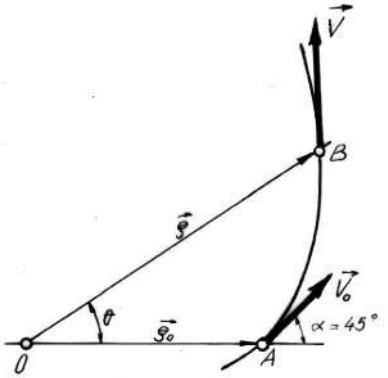


Fig. 13.18

13. Aplicând teorema impulsului, să se afle traiectoria și distanța la care cade un punct material de greutate G, aruncat din vârful unei clădiri înalte de h = 20m, cu o viteză inițială v_0 = 20 m/s, orizontală, fără a lua în considerare rezistența aerului fig. 13.19).

R: a) $y = -\dfrac{1}{80}x^2 + 20$

b) $x_B = 40m$

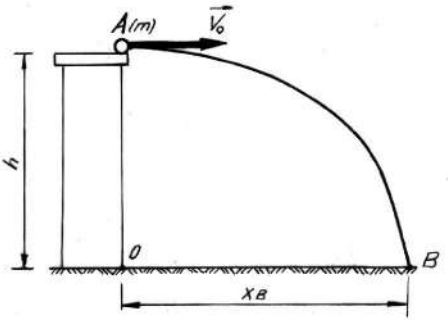


Fig. 13.19

14. Cu ce viteză v_0 aruncăm un punct material de masă m, de la baza unui plan înclinat de unghi α, astfel încât, părăsind planul, să cadă la distanța d, fără a lua în considerare frecarea și rezistența aerului (fig. 13.20). Aplicație numerică: l = 10 m, $\alpha = 30^o$, d = 10 m.

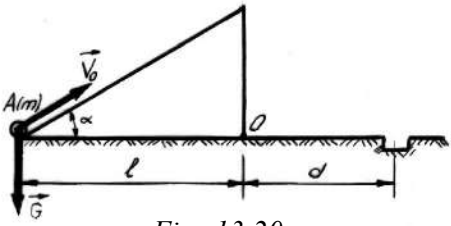


Fig. 13.20

R: $v_0 = 13{,}15$ m/s

15. Un punct material de masă m este lansat cu o viteză inițială v_0 = 7 m/s orizontală, pe cercul vertical de rază R = 2m (13.21). Să se determine:
a) viteza în punctul B; b) cu ce viteză v_0 trebuie lansat pentru a trece de punctul C.

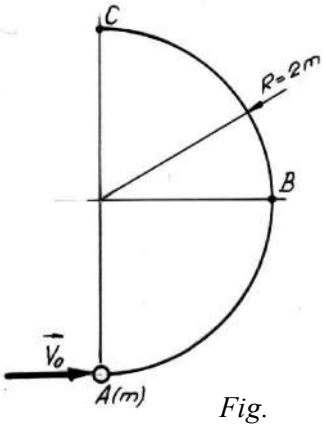


Fig. 13.21

R: a) $v_B = 3$ m/s

b) $v_0 > 10\,\text{m/s}$

16. Un tren are împreună cu locomotiva m = 30.000 kg. În mișcare cu viteză foarte mică îi este necesară o forță de tracțiune de 600 N pentru învingerea frecării. Locomotiva menține o viteză de 72 km/h, cu puterea de 60 kW. Presupunând că la orice viteză frecarea este aceeași, iar rezistența aerului kv^2, să se determine cu cât scade viteza după 1 km dacă se „taie" aburii (fig. 13.22).

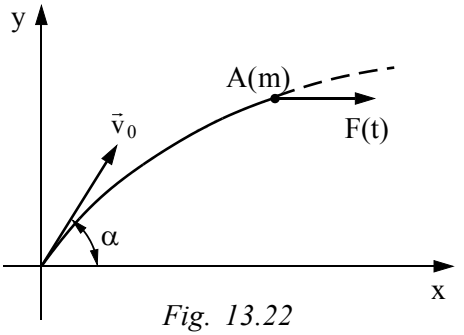


Fig. 13.22

R: v = 30 km/h

17. Un punct de masă m se mişcă pe un plan orizontal neted Oxy, sub acţiunea forţei F(t) direcţionată paralel cu axa Ox. Modulul forţei variază conform legii $F = bt^2$, unde $b = const > 0$. Viteza iniţială v_0 face un unghi α faţă de direcţia de acţiune a forţei F. Să se determine ecuaţia traiectoriei punctului.

R: $$x = \frac{b}{12m}\left(\frac{y}{v_0 \cdot \sin\alpha}\right)^4 + y \cdot ctg\alpha$$

18. Punctul material de masă m se mişcă într-un plan vertical pe un inel de rază R (fig. 13.23). La momentul iniţial, punctul s-a aflat în A pe diametrul orizontal al inelului şi i s-a imprimat viteza iniţială v_0. Coeficientul de frecare de alunecare între punct şi inel este μ. Să se determine valoarea cea mai mică a vitezei iniţiale v_0, pentru ca punctul să atingă extremitatea opusă a diametrului orizontal B.

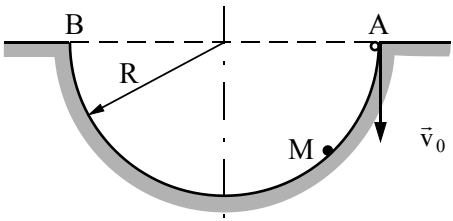


Fig. 13.23

R: $$v_0 = \sqrt{\frac{6\mu \cdot g \cdot R\left(1 + e^{2\pi\mu}\right)}{1 + 4\mu^2}}$$

19. Un corp de masă m cade pe Pământ, vertical într-o atmosferă liniştită, cu viteza constantă $v_0 = mg/k$, unde $k = const > 0$. (fig. 13.24) La înălţimea h deasupra Pământului întră într-un curent de aer, care se deplasează orizontal cu viteza $\vec{u}$. Forţa existentă care

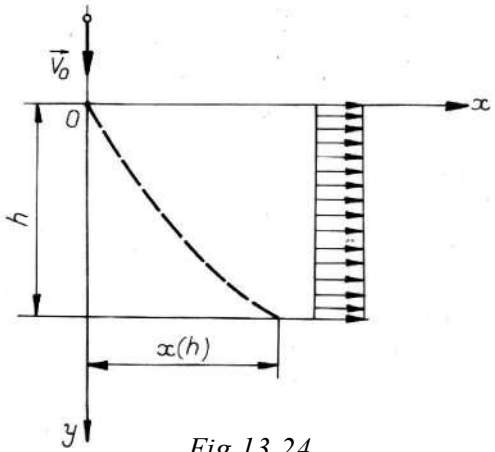


Fig.13.24

acționează asupra corpului în fluxul de aer este $\vec{R} = -k \cdot \vec{v}_r$, unde $\vec{v}_r$ este viteza corpului în raport cu fluxul de aer. Determinați mărimea abaterii orizontale x(h) a corpului de la direcția inițială verticală, în momentul căderii pe Pământ.

R: $x(h) = \tau \cdot u\left[\frac{h}{g \cdot \tau^2} - \left(1 - e^{-\frac{h}{g \cdot \tau^2}}\right)\right]$ unde $\tau = \frac{m}{k}$

20. Un punct material M de masă m se mişcă într-un plan vertical, fiind atras de polul O cu forța $\vec{F} = -k \cdot m \cdot \vec{r}$ şi întâmpinând rezistența aerului $\vec{R} = -c \cdot m \cdot \vec{v}$, unde $k = \text{const} \neq 0$, $c = \text{const} > 0$. În momentul inițial, punctul se afla în A(0, h) şi este lansat cu viteza orizontală v_0 (fig. 13.25). Se cere: a) să se scrie ecuațiile diferențiale ale mişcării; b) să se integreze ecuațiile diferențiale şi să se stabilească ecuațiile parametrice ale traiectoriei, dacă $c = 2\sqrt{k}$.

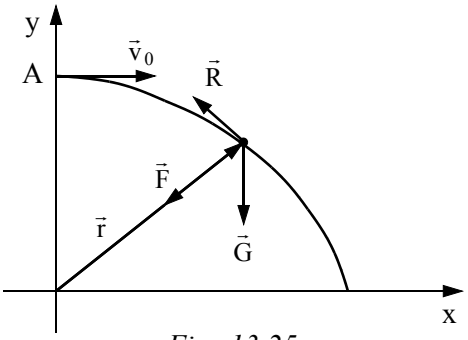


Fig. 13.25

R: a) $\ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$
$\ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = -g$

b) $x = v_0 \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{2}t}$ $y = \left(h + \frac{g}{k}\right)\left(\frac{c}{2}t + 10\right)e^{-\frac{c}{2}t} - \frac{g}{k}$

21. Un conveior cu bandă transportoare AB de lungime *l* = 7 m, este fixat în A printr-o articulație şi ridicat sau coborât în B, după dorință. Nisipul se descarcă în B de pe bandă şi apoi cade liber până la nivelul solului în C. Cunoscând că banda se deplasează cu o viteză constantă v_0 = 3 m/s, să se determine: a) distanța d maximă posibilă dintre A şi C; b)

unghiul corespunzător α ($\phi\iota\gamma$.13.26).

R: a) $d_{max} = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2l \cdot g}{v_0^2 \sin\alpha}}\right) + l\cos\alpha = 8{,}87\,\text{m}$

b) $\cos 2\alpha = \frac{2l \cdot g}{v_0^2}\sin^3\alpha \Rightarrow \alpha = 21^0 20' 17''$

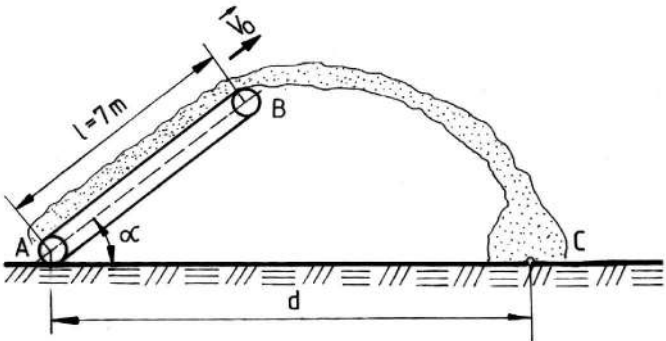


Fig. 13.26

22. Nisipul se descarcă în A de pe un conveior orizontal cu bandă, într-o pâlnie ca în schiță (fig. 13.27). Pentru ce domeniu de viteză a benzii nisipul va intra în pâlnia BC? Viteza benzii este v(m/s).

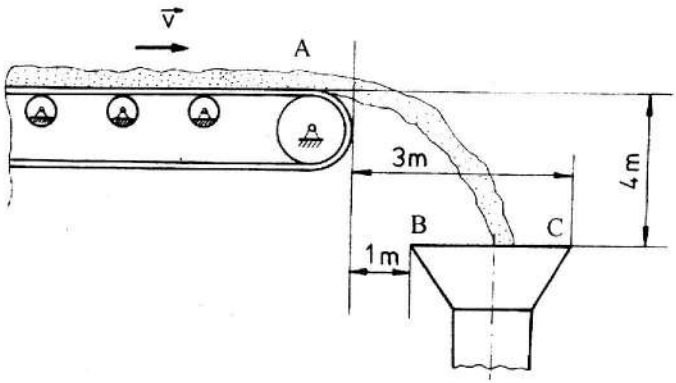


Fig. 13.27

R: $2{,}45\,\text{m} \le v \le 7{,}35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

23. Un proiectil este tras de la marginea unei faleze de 150 m cu o viteză inițială de 20 m/s, la un unghi de 30° față de orizontală (fig. 13.28). Neglijând rezistența aerului, să se determine: a) distanța pe orizontală de la tun până în locul unde proiectilul va lovi apa; b) înălțimea maximă deasupra apei care va fi atinsă de proiectil.

R: a) $x_{max} = 3.774{,}3$ m

b) $y_{max} = 658{,}7$ m

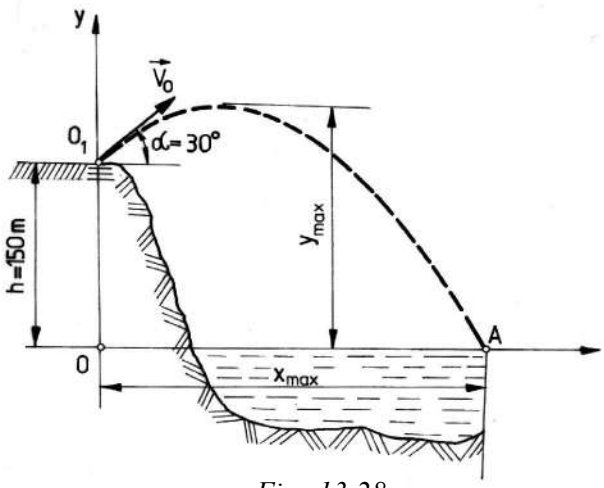


Fig. 13.28

24. Un corp cade într-un puț de adâncime h (fig.13.29). Forța de atracție a Pământului este F = mgx/R, unde R este raza Pământului, iar x distanța de la corp la centrul Pământului. Să se determine: a) legea de mişcare x = x(t); b) viteza şi timpul în care corpul cade fără viteză inițială.

R: a) $x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t$ b) $v = \sqrt{2g \cdot h\left(1 - \frac{h}{2R}\right)}$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos\frac{R-h}{R}$$

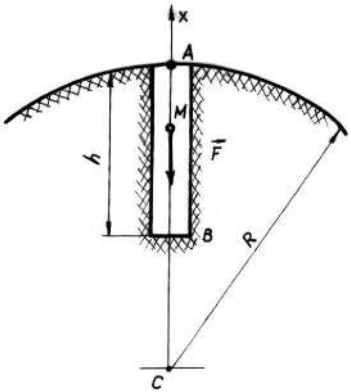


Fig. 13.29

25. Să se determine viteza inițială v_0 și unghiul α sub care trebuie aruncat un punct material de masă m, pentru a cădea perpendicular pe planul AB în B(4,3) (fig. 13.30).

R: $v_0 = 9{,}20$ m/s

$tg\alpha = 2{,}833$; $\alpha = 70^o30'$

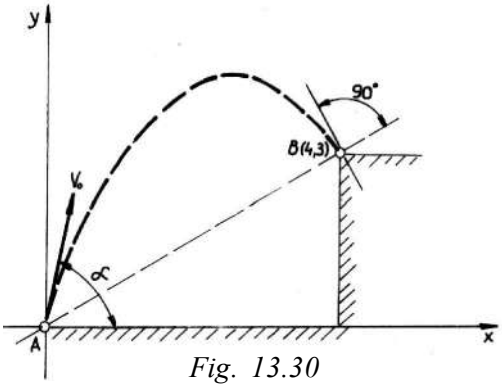


Fig. 13.30

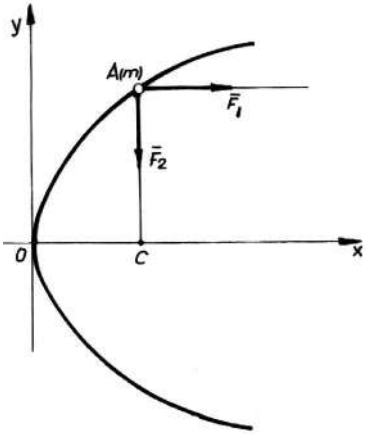


Fig. 13.31

<u>26.</u> Un punct A de masă m, acționat de două forțe, se mișcă uniform cu viteza v_0 pe parabola $y^2 = 2px$. Forța $\vec{F}_1$ este paralelă cu axa parabolei, iar $\vec{F}_2$ este dirijată spre focarul C al parabolei (fig. 13.31). Să se determine mărimile acestor forțe (știind că raza de curbură este $\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$).

R: $F_1 = F_2 = \dfrac{m v_0^2}{4\left(x + \dfrac{p}{2}\right)}$

27. Ştiind că un punct de masă m cade în aer pe verticală după legea $x(t) = \dfrac{g}{k}t + \dfrac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right)$, unde t este timpul, g accelerația gravitațională, iar $k = \text{const} > 0$, să se determine expresia forței de rezistență a aerului R. Axa x este îndreptată pe verticală în jos.

R: $\vec{R} = -m \cdot k \cdot \vec{v}$

28. Un punct material de greutate Q execută o mişcare rectilinie după legea $x(t) = r\left(\cos \omega t + \dfrac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$, unde t este timpul, ω este pulsația, iar r şi *l* constante. Să se determine cea mai mare valoare a forței F, forță sub acțiunea căreia punctul execută mişcarea.

R: $F = \dfrac{Q}{g} r\omega^2\left(1 + \dfrac{r}{l}\right)$

29. Un punct material liber, de masă m, descrie elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Accelerația punctului este tot timpul paralelă cu axa Oy. La timpul t = 0, coordonatele punctului sunt x = 0, y = b, iar viteza v_0. Să se determine forța care acționează asupra punctului material (fig. 13.32).

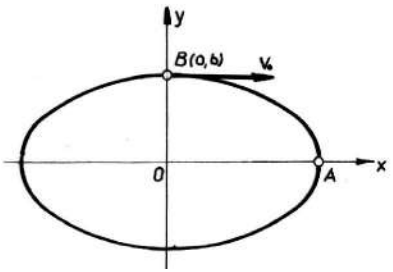


Fig. 13.32

R: $\vec{F} = -\dfrac{v_0^2 \cdot b^2}{a^3 \cdot y^3}\vec{j}$

30. Un punct de masă m = 20 g descrie sub acțiunea unei forțe centrale, care-l atrage după legea lui Newton, o elipsă de semiaxe 0,1 m şi 0,8 m în 50 de secunde. Să se determine forța de atracție maximă şi minimă. (1 N = 10^5 dyn)

R: F_{max} = 19,7 dyn; F_{min} = 1,2 dyn

31. Viteza inițială a unui proiectil este v_0 = 490 m/s. Sub ce unghi față de orizontală trebuie să lansăm proiectilul din origine, pentru ca să nimerească punctul de coordonate x = 700 m şi y = 680 m?

R: $\alpha = 45^o$

32. Să se determine sub ce unghi α față de axa orizontală trebuie lansat din origine un punct de masă m, astfel încât el să atingă dreapta (d) într-un timp minim (fig.13.33).

R: $tg\alpha \cdot tg\beta = 1$ sau $\alpha + \beta = 90^0$

Viteza inițială v_0 trebuie să fie perpendiculară pe dreapta (d).

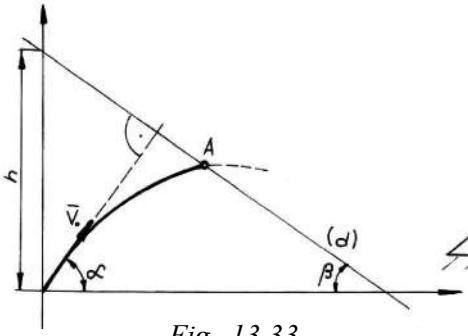


Fig. 13.33

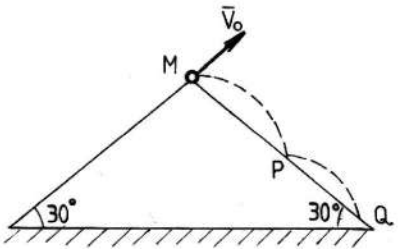


Fig. 13.34

33. Un mobil este lansat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^o$ (fig. 13.34) şi ajunge în M cu viteza v_0 = 10 m/s, apoi sare în P pe un plan înclinat, tot de unghi $\alpha = 30^o$, cu un coeficient de restituire k = 1. Să se determine distanțele MP şi PQ.

R: MP = 20 m; PQ = 6,4 m.

34. Un mobil lansat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^o$ se opreşte după 5 m. Frecarea are coeficientul $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a) Să se determine cu ce viteză v_0 a fost lansat; b) Cu ce viteză v_0 mobilul loveşte un perete vertical. Se cere coeficientul de restituire la ciocnire pentru ca mobilul să cadă la jumătatea distanţei dintre perete şi punctul de lansare în mişcare parabolică.

R: a) $v_0 = 10$ m/s
b) $k = 0,5$

35. Un pendul este lansat din poziţia I (cu $\theta = 60^o$ faţă de verticală), cu viteza $v_A = \sqrt{l \cdot g}$. Firul are lungimea *l*, iar de el este suspendată greutatea G (fig. 13.35). Când tensiunea din fir este $T = \frac{3}{2} G\sqrt{3}$ (poziţia II), firul se rupe. În acel moment greutatea este la 2*l* deasupra solului. La ce distanţă x atinge solul?

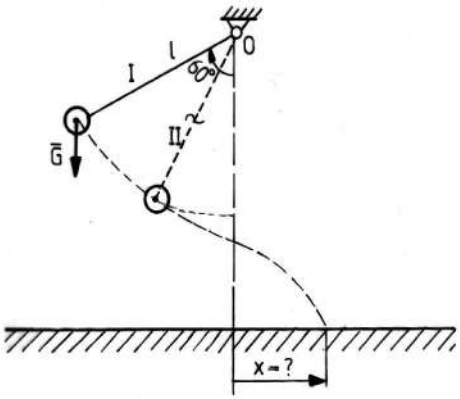


Fig. 13.35

R: $x^2 = v_B^2 - \left(2l - \frac{g \cdot t^2}{2}\right)^2$

36. Să se determine viteza iniţială v_0 a unui mobil care, lansat sub unghiul α (fig. 13.36)din extremitatea unei trepte de înălţime *l*/2 şi lungime *l*, sare din treaptă (coeficientul de restituire la ciocnire este $k = 0,5$).

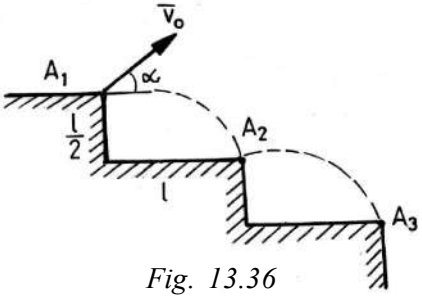


Fig. 13.36

R: $v_0 = \sqrt{\frac{2g \cdot l}{3}}$

37. Pe un disc de greutate neglijabilă şi rază R este trecut un fir de care sunt prinse greutăţile 2G şi G. OB este orizontală când corpul G este lansat cu viteza v_0. În momentul lansării, din A cade o picătură de apă. Să se determine viteza picăturii pentru ca aceasta să cadă (în mişcare) chiar pe G. Să se determine, de asemenea, proiecţiile vitezei picăturii şi greutăţii G în momentul ciocnirii.

R: $v_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2g \cdot R}$; $v_G = -\frac{1}{6}\sqrt{2g \cdot R}$

$v_0'\left(v_x = \frac{1}{3}\sqrt{2g \cdot R};\ v_y = 3\sqrt{\frac{g \cdot R}{2}} \right)$

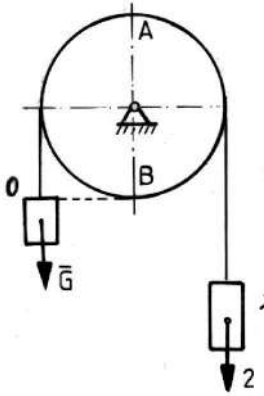


Fig. 13.37

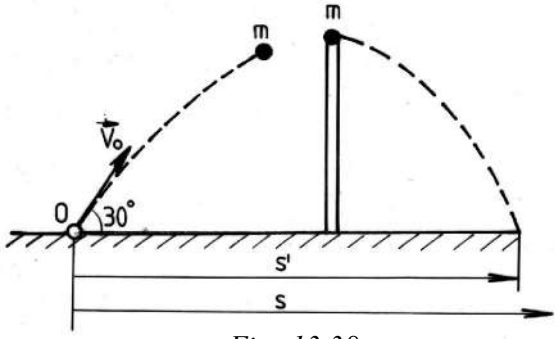


Fig. 13.38

38. Dintr-un punct O se lansează un mobil de masă m, cu viteza v_0 = 50 m/s, sub un unghi de 30°. După timpul t = 1 s, el loveşte plastic deasupra unui stâlp un alt corp de masă m. Unde ar fi căzut primului mobil dacă mişcarea sa era neîntreruptă şi unde cad acum cele două corpuri?

Răspuns: s = 212,5 m; s' = 104,5 m

39. De la înălţimea h deasupra punctului A al unei emisfere fixe (fig. 13.39) se lasă să cadă un punct material care loveşte perfect elastic emisfera. Cât trebuie să fie h, pentru ca după ciocnire punctul material

să cadă în B. Dar dacă ciocnirea este plastică?

R: $h \cong 0{,}1R$; $\alpha_N = 29^0 15'$, N fiind locul în care punctul material se desprinde de emisferă.

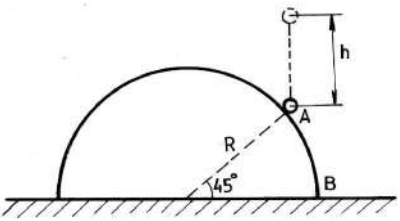


Fig. 13.39

40. Fie o emisferă fixă de rază R (fig. 13.40). În B cade un mobil de la înălțimea h = AB şi se ciocneşte cu emisfera. Coeficientul de restituire este k = 0,5. a) Să se determine h pentru ca după ciocnire mobilul să sară în C (unghiul BOC = 60°); b) Dacă unghiul BOC = 45° şi ciocnirea ar fi perfect elastică, se cere h pentru ca mobilul să sară în O' (pe fundul vasului emisferic).

R: a) h = 3,14 R b) $h = \dfrac{R}{2{,}4}$

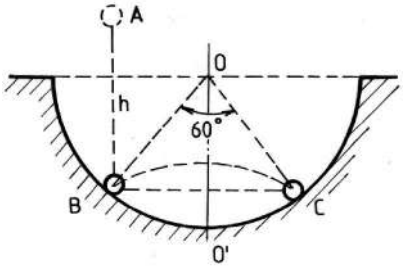


Fig. 13.40

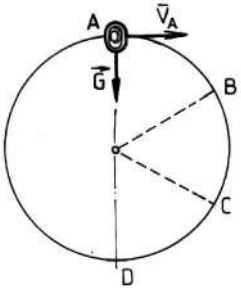


Fig. 13.41

41. Fie cercul de sârmă, fix, vertical, de rază R (fig. 13.41). Să se determine viteza orizontală v_A cu care trebuie lansat un inel de greutate G pe cerc pentru ca punctele B şi C, definite prin unghiuri de 60° cu verticala, inelul să exercite o forță de reacțiune N = 5 G pe cerc. Care sunt vitezele şi acceleraţiile în aceste puncte?

R: $v_B = \sqrt{\dfrac{11}{2} g \cdot R}$; $v_C = \sqrt{\dfrac{9}{2} g \cdot R}$ $a_B = 5{,}57\,g$; $a_C = \dfrac{g}{2}\sqrt{30}$

14

NOȚIUNI DE VIBRAȚII MECANICE

14.1. Definiții. Clasificarea vibrațiilor mecanice 419
14.2. Vibrațiile libere neamortizate 420
14.2.1. Constantele elastice ale câtorva sisteme mecanice 420
14.2.2. Stabilirea ecuației diferențiale 422
14.3. Vibrații libere amortizate 424
14.4. Vibrații forțate neamortizate 427
14.5. Vibrații forțate amortizate 429
14.6. Probleme rezolvate 432
14.7. Probleme propuse 435

14

NOȚIUNI DE VIBRAȚII MECANICE

14.1. DEFINIȚII. CLASIFICAREA VIBRAȚIILOR MECANICE

Prin **vibrații** se înțeleg oscilațiile sistemelor elastice, adică mișcările oscilatorii ale unor mase în jurul unei poziții de echilibru, asupra lor acționând forțe de readucere elastice.

Sistemul mecanic elastic este un ansamblu format din unul sau mai multe mase (corpuri) cu legăturile lor interioare şi exterioare în care apar vibrații mecanice. Un sistem este elastic dacă în componența sa intră cel puțin un element care se deformează elastic.

Teoria vibrațiilor mecanice se ocupă cu studiul caracteristicilor cinematice şi dinamice ale sistemelor elastice în scopul combaterii şi prevenirii efectelor dăunătoare ale vibrațiilor sau a utilizării lor în diferite aplicații tehnice. Vibrațiile mecanice pot avea şi un rol pozitiv, de exemplu, în cazul ciocanelor vibratoare pneumatice sau mecanice, a transportoarelor vibratoare etc. Inginerul trebuie să cunoască bine legile care guvernează fenomenele vibratorii, pentru a aplica după caz măsurile care se impun.

Vibrațiile mecanice se pot clasifica după o serie de criterii:

a) După numărul gradelor de libertate sau parametrii independenți care definesc la un moment oarecare, poziția tuturor elementelor sistemului vibrant, sunt: vibrații în sisteme cu unul, cu două sau mai multe grade de libertate şi cu un număr infinit de grade de libertate. Un corp rigid legat elastic, a cărui mişcare vibratorie constă dintr-o translație pe o direcție cunoscută sau o rotație în jurul unei axe date, are un singur grad de libertate.

b) După tipul solicitării elementului elastic, sunt: vibrații de întindere-compresiune, de răsucire sau torsiune şi încovoiere.

c) După tipul ecuației diferențiale a mişcării din care decurg o serie de proprietăți ale mişcării - vibrațiile sunt: **liniare** şi **neliniare**.

d) După natura acțiunii forței exterioare, vibrațiile sunt: **libere**

sau **naturale**-sunt datorate unei deplasări sau impuls inițial; **forțate** sau **întreținute**-sunt vibrațiile produse de o forță exterioară periodică; **autoexcitate**-sunt produse de o cauză interioară sistemului; **parametrice**-datorită variației unui parametru al sistemului.

e) După legea de variație a amplitudinii în timp, vibrațiile sunt: **neamortizate** când amplitudinea rămâne constantă în timp şi **amortizate** când amplitudinea scade în timp.

De asemenea, vibrațiile pot fi **deterministe** sau **aleatorii.** Dacă este deterministă, ea are o formă bine definită, astfel încât valoarea elongației la un anumit moment se deduce complet (cunoscând funcția care o descrie). Dacă vibrația este aleatorie (întâmplătoare) valoarea elongației la un moment dat nu poate fi dedusă decât pe bază statistică, indicându-se probabilitatea de apariție a unor amplitudini şi frecvențe.

În acest capitol se vor studia vibrațiile liniare ale sistemelor mecanice cu un singur grad de libertate, considerând pe rând că vibrațiile sunt libere neamortizate şi amortizate, forțate neamortizate şi amortizate.

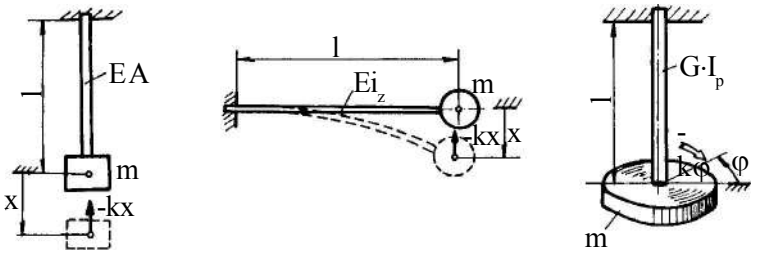
Vibrația unui sistem se studiază adesea pe baza unui model alcătuit dintr-o singură masă şi un resort (element elastic). Poziția masei fiind definită de o singură coordonată independentă x sau θ, se spune că sistemul are un singur grad de libertate.

14.2. VIBRAȚIILE LIBERE NEAMORTIZATE

14.2.1. Constantele elastice ale câtorva sisteme mecanice

Constanta elastică a unui sistem elastic se calculează pe baza formulelor de determinare a deformațiilor statice din Rezistanța materialelor. Astfel, pentru un sistem ce execută vibrații de întindere-compresiune (fig.14.1,a), la care elementul elastic este o bară omogenă de lungime l şi aria secțiunii transversale A, constituită dintr-un material cu modulul de elasticitate E, săgeata statică sub secțiunea unei forțe axiale F este:

$$x_{st} = \frac{Fl}{EA}. \qquad (14.1)$$



a. b. c.

Fig. 14.1

Conform relațiilor (14.1), constanta elastică este:

$$k = \frac{F}{x_{st}} = \frac{EA}{l}, \tag{14.2}$$

unde produsul EA reprezintă rigiditatea la întindere-compresiune.

Pentru un sistem la care elementul elastic este supus la încovoiere, constanta elastică se determină în acelaşi fel. De exemplu, pentru bara de lungime l, încastrată la un capăt şi liberă la celălalt (fig.14.1,b), deformația statică sub acțiunea unei forțe verticale F este:

$$x_{st} = \frac{Fl^3}{3EI_z}. \tag{14.3}$$

Constanta elastică conform relației (14.3) rezultă:

$$k = \frac{F}{x_{st}} = \frac{3EI_z}{l^3}, \tag{14.4}$$

în care E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal; I_z momentul de inerție geometric al secțiunii barei; produsul EI_z reprezintă rigiditatea la încovoiere a barei.

Discul de masă m, din figura 14.1,c execută vibrații de torsiune deoarece elementul elastic, bara de lungime l, este supusă la răsucire. Bara are modulul de elasticitate transversal G şi momentul de inerție geometric polar al secțiunii I_p. Deformația de torsiune sub acțiunea unui moment M este:

$$\varphi_{st} = \frac{Ml}{GI_p}. \tag{14.5}$$

Constanta elastică a sistemului conform (14.5) rezultă:

$$k = \frac{M}{\varphi_{st}} = \frac{GI_p}{l}, \qquad (14.6)$$

unde produsul GI_p reprezintă rigiditatea la torsiune a barei.

14.2.2. Stabilirea ecuației diferențiale

Dacă asupra sistemului vibrant nu acționează forțe perturbatoare, iar forțele de amortizare sunt neglijabile, vibrațiile sistemului sunt libere neamortizate. Ele se mai numesc vibrații naturale sau proprii. Astfel, sistemele elastice prezentate în figura 14.1, execută vibrații libere dacă sunt scoase din poziția de echilibru şi lăsate să oscileze.

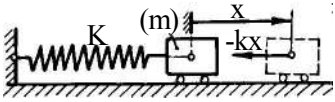


Fig. 14.2

Cel mai simplu model mecanic, al unui sistem elastic ce execută vibrații libere neamortizate este prezentat în figura 14.2; un punct material de masă m fixat la extremitatea unui arc elicoidal de constantă K, masă neglijabilă şi caracteristică elastică liniară. Punctul se poate deplasa fără frecare pe o suprafață orizontală.

Asupra punctului acționează numai forța elastică, care caută să-l readucă în poziția de echilibru static.

Ecuația diferențială a mişcării se obține proiectând ecuația fundamentală a dinamicii pe direcția mişcării, care se alege ca axă Ox:

$$m\ddot{x} = -kx \text{ sau } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (14.7)$$

Notând cu $p^2 = \frac{K}{m}$, pulsația proprie a sistemului, se obține:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0, \qquad (14.8)$$

ecuația diferențială a mişcării vibratorii cu soluția generală de forma:

$$x = A\cos pt + B\sin pt, \qquad (14.9)$$

unde constantele A şi B se determină din condițiile inițiale ale mişcării: la $t = 0,\ x = x_O, \dot{x} = v_O$.

Constantele devin:

$$A = x_O ; B = v_O / p. \tag{14.10}$$

Soluția ecuației diferențiale (14.9) se va scrie:

$$x = x_O \cos pt + \frac{v_O}{p} \sin pt, \tag{14.11}$$

care se mai poate pune şi sub forma:

$$x = a \sin(pt + \varphi), \tag{14.12}$$

unde noile constante de integrare, amplitudinea a şi faza inițială φ au, în cazul general, expresiile:

$$a = \sqrt{x_O^2 + (v_O / p)^2} \text{ şi } \varphi = \operatorname{arctg}(p x_O / v_O). \tag{14.13}$$

Soluția ecuației diferențiale este o sinusoidă (14.12), deci sistemul execută o mişcare oscilatorie armonică, cu pulsația $p = \sqrt{\frac{k}{m}}$, perioada $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ şi frecvența $f = \frac{1}{T}$.

Dacă se ține seama de faptul că $K = mg / x_{st}$, expresia pulsației proprii a sistemului se mai poate scrie astfel:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}. \tag{14.14}$$

Se observă că pulsația proprie a vibrației, perioada şi frecvența depind numai de mărimile intrinseci ale sistemului vibrant, adică de constanta elastică şi de masă, nedepinzând de amplitudinea vibrației şi deci de condițiile inițiale ale mişcării.

Pentru sistemul ce execută vibrații de torsiune din figura14.1,c ecuația diferențială se scrie:

$$\ddot{\theta} + p^2 \theta = 0, \tag{14.15}$$

unde pulsația proprie este $p = \sqrt{\frac{k}{J}}$, (14.16)

în care J reprezintă momentul de inerție mecanic față de axa de rotație.

14.3. VIBRAŢII LIBERE AMORTIZATE

În natură nu există vibraţii libere care să se menţină la infinit cu aceeaşi amplitudine. Din cauza frecărilor în sistemul oscilant -frecări care fac ca energia mecanică a sistemului vibrant să fie treptat disipată în căldură sau alte forme de energie- amplitudinea mişcării scade continuu. Se spune că vibraţiile libere se amortizează. O astfel de mişcare nu mai este periodică, dar este considerată mişcare vibratorie.

Frecările care apar în sistem pot fi de natură **vâscoasă** (frecări în fluide-amortizoare cu lichid sau aer-), fie de natură **coulombiană** (frecare uscată). În continuare se vor considera frecările din sistem de natură vâscoasă, la care forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza masei m. Acest lucru este echivalent cu introducerea în sistemul vibrant a unui amortizor, format dintr-un cilindru umplut cu ulei şi un piston cu orificii, legat în paralel cu elementul elastic.

Modelul mecanic al unui asemenea sistem ce execută vibraţii libere amortizate, este prezentat în figura 14.3. Amortizorul având constanta de amortizare c este legat în paralel cu arcul având constanta elastică K. Masa m se deplasează în lungul axei x, având acceleraţia $\ddot{x}$ şi viteza $v = \dot{x}$. Între cilindrul amortizorului şi piston viteza relativă este $\dot{x}$; ei îi corespunde forţa de frecare vâscoasă $c\dot{x}$, de sens opus vitezei, deci de acelaşi sens cu forţa elastică.

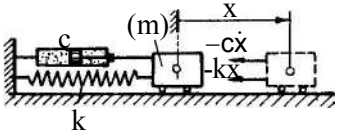


Fig. 14.3

Ecuaţia diferenţială a mişcării masei m este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \tag{14.17}$$

Împărţind cu m şi notând

$$\frac{c}{m} = 2n, \frac{k}{m} = p^2, \tag{14.18}$$

ecuaţia devine:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0. \tag{14.19}$$

Ecuaţia caracteristică este: $r^2 + 2nr + p^2 = 0,$ cu rădăcinile:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}. \tag{14.20}$$

Felul mişcării depinde de natura acestor rădăcini.

a) Amortizare subcritică. Cazul amortizării slabe este cazul cel mai des întâlnit, când rădăcinile (14.20) sunt complexe; deci:

$$n^2 - p^2 < 0$$

Dacă se înlocuieşte $n^2 - p^2 = -p_1^2$, soluțiile (14.20) sunt:

$$r_{1,2} = -n \pm ip_1, \tag{14.21}$$

iar soluția ecuației diferențiale va fi:

$$x = C_1 e^{(-n+ip_1)t} + C_2 e^{(-n-ip_1)t} = e^{-nt}\left(C_1 e^{ip_1 t} + C_2 e^{-ip_1 t}\right) \tag{14.22}$$

Utilizând relațiile lui Euler:

$$\frac{e^{ip_1 t} + e^{-ip_1 t}}{2} = \cos p_1 t; \qquad \frac{e^{ip_1 t} - e^{-ip_1 t}}{2} = \sin p_1 t, \tag{14.23}$$

Soluția generală (14.23) se mai poate scrie sub forma:

$$x = e^{-nt}\sin\left(A\cos p_1 t + B\sin p_1 t\right), \tag{14.24}$$

sau sub forma: $x = ae^{-nt}\sin\left(p_1 t + \varphi\right)$. (14.25)

Constantele de integrare A şi B, sau a şi φ se determină din condițiile inițiale. Considerând cazul general de condiții inițiale, adică la t = 0, x = x_O şi $\dot{x} = v_O$, atunci aceste constante au valorile:

$A = x_O; B = \left(v_O + nx_O\right)/p_1$, respectiv

$$a = \sqrt{x_O^2 + \left[\left(v_O + nx_O\right)p_1\right]^2}; \ \varphi = \operatorname{arctg}\left[p_1 x_O / \left(v_O + nx_O\right)\right].$$

Mişcarea descrisă de ecuația (14.25) este o vibrație modulată în amplitudine; este o vibrație pseudoperiodică de pulsație p_1, dar cu amplitudinea funcție de timp. Reprezentarea grafică a mişcării descrise de ecuația (14.25) este dată în figura 14.4.

Mişcarea are pseudopulsația p_1 şi pseudoperioada T_1:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}. \tag{14.26}$$

Decrementul logaritmic al amortizării reprezintă logaritmul natural al raportului a două amplitudini succesive; el reprezintă un indice al

intensității amortizării:

$$\delta = \ln\frac{a_1}{a_2} = \ln\frac{ae^{-nt}}{ae^{-n(t+T_1)}} = \ln e^{nT_1} = nT_1. \qquad (14.27)$$

b) Amortizarea critică se obține atunci când $n^2 - p^2 = 0$ deci rădăcinile ecuației caracteristice sunt egale şi reale: $r_{1,2} = -n$. Soluția ecuației diferențiale este:

$$x = C_1 e^{-nt} + C_2 te^{-nt} = e^{-nt}(C_1 + C_2 t). \qquad (14.28)$$

Cu aceleaşi condiții inițiale, ea devine:

$$x = e^{-nt}\left[(v_O + nx_O)t + x_O\right]. \qquad (14.29)$$

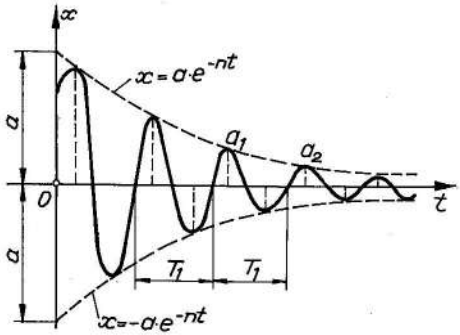


Fig. 14.4

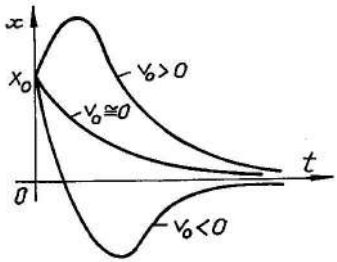


Fig. 14.5

Lipsa funcțiilor trigonometrice, indică absența caracterului oscilatoriu sau pseudoperiodic. Deci, mişcarea are un caracter amortizat şi este aperiodică. Reprezentarea grafică a mişcării este dată prin una din curbele din figura 14.5.

Punând condiția $n^2 = p^2$ prin notațiile (14.18), rezultă **coeficientul critic de amortizare**:

$$\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow c_{cr} = 2\sqrt{k \cdot m}. \qquad (14.30)$$

În afara coeficienților c, n şi δ definiți mai înainte, care caracterizează un amortizor, se mai foloseşte în teoria vibrațiilor **factorul de amortizare**:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}. \qquad (14.31)$$

c) Amortizarea supracritică, se obține când $n^2 - p^2 > 0$, adică rădăcinile ecuației caracteristice (14.20) sunt reale, distincte şi ambele negative.

Dacă:

$r_{1,2} = -n \pm p_1'$, notam $r_1 = -\lambda_1$ şi $r_2 = -\lambda_2$.

Soluția ecuației diferențiale (14.19) este:

$$x = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}. \qquad (14.32)$$

Sub această formă a soluției generale, apare clar caracterul amortizat al mişcării, curbele exponențiale tind la zero. Şi în acest caz lipsa funcțiilor trigonometrice arată absența oricărui caracter pseudoperiodic sau oscilator. Mişcarea are un **caracter aperiodic** amortizat. Pentru o intensitate dată a amortizării, reprezentarea grafică a ecuației (14.32) are una din formele din figura 14.5, funcție de valoarea vitezei inițiale.

14.4. VIBRAȚII FORȚATE NEAMORTIZATE

Un sistem mecanic elastic execută vibrații forțate dacă asupra lui acționează o forță care întreține mişcarea. Forța care întreține mişcarea poate fi armonică, periodică sau aleatorie. În continuare se va studia cazul când asupra masei m acționează o forță armonică $F(t) = F_O \sin \omega t$. Modelul mecanic al unui sistem cu un grad de libertate, format din masa m şi arcul de constantă K, ce execută vibrații forțate sub acțiunea forței armonice $F_O \sin \omega t$. este reprezentat în figura 14.6.

Ecuația diferențială a mişcării masei m este

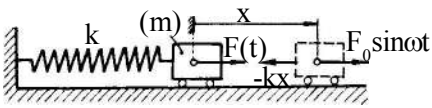


Fig. 14.6

$$m\ddot{x} + kx = F_O \sin \omega t,$$

împărțind ecuația cu m şi notând cu $p^2 = K/m$, rezultă:

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{F_O}{m} \sin \omega t, \qquad (14.33)$$

unde p reprezintă pulsația proprie

a sistemului iar ω pulsația forței perturbatoare F (t).

Ecuația (14.33) este o ecuație diferențială de ordinul doi cu coeficienți constanți, neomogenă. Soluția acestei ecuații se compune din soluția ecuației omogene la care se adaugă o soluție particulară de forma termenului liber:

$$x = x_{om} + x_p = a\sin(pt + \varphi) + X_O \sin \omega t. \qquad (14.34)$$

Constanta X_O, amplitudinea soluției particulare se determină din condiția ca acestă soluție să verifice ecuația (14.34).

$$\dot{x}_p = X_O \omega \cos \omega t; \quad \ddot{x}_p = -X_O \omega^2 \sin \omega t,$$

şi înlocuind $-X_O \omega^2 \sin \omega t + X_O p^2 \sin \omega t = \frac{F_O}{m} \sin \omega t,$

rezultă $$X_O = \frac{\frac{F_O}{m}}{p^2 - \omega^2} = \frac{F_O}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} = x_{st} A_O. \qquad (14.35)$$

unde x_{st} reprezintă deformația statică sub acțiunea forței F_O, iar A_O **factorul de amplificare** al vibrației forțate cu următoarea expresie:

$$A_O = \frac{X_O}{x_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2}. \qquad (14.36)$$

Cu aceste notații soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$x = a\sin(pt + \varphi) + x_{st} A_O \sin \omega t. \qquad (14.37)$$

Se observă că mişcarea masei m nu mai este armonică, ea rezultând acum din compunerea a două mişcări armonice de pulsații diferite p şi ω.

În realitate, datorită amortizării, componenta proprie dispare suficient de repede pentru ca în regim staționar (permanent) să nu ne mai intereseze decât componenta forțată a vibrației. În acest caz mişcarea va fi armonică cu pulsația egală cu pulsația forței perturbatoare de ecuație:

$$x(t) \cong x_{st} A_O \sin \omega t = \frac{F_O}{k} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]} \sin \omega t. \qquad (14.38)$$

Mărimea A_O, numită factor de amplificare, după cum se observă din relația (14.36) este egală cu raportul dintre amplitudinea vibrației forțate X_O şi deformația statică a sistemului x_{st}, şi depinde de pulsația forței perturbatoare ω şi pulsația proprie a sistemului p.

Valorile absolute ale factorului de amplificare A_O sunt reprezentate în figura 14.7, în funcție de pulsația relativă $\eta=\omega/p$.

Se observă că pentru ω=p, A_O tinde spre infinit; prin urmare şi amplitudinea vibrației forțate tinde la infinit. Apare aşa numitul fenomen de **rezonanță**, extrem de periculos pentru orice sistem mecanic vibrant.

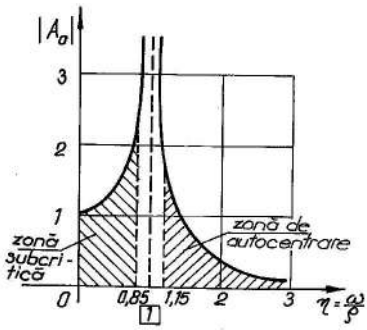


Fig. 14.7

În tehnică, zona delimitată de valorile pulsației relative η=0,85...1,15; denumită zonă de rezonanță sau zonă critică, se caută să se evite. De aceea în construcția de maşini şi instalații industriale se urmăreşte ca sistemele mecanice vibrante să se situeze în afara acestei zone, fie în zona η=0...0,85 numită zonă subcritică, caracterizată prin construcții masive (pulsația proprie are valori mari), în general supradimensionate, fie în zona $\eta \geq 1{,}15$ denumită zonă supracritică, caracterizată prin construcții mai uşoare. În această ultimă zonă pe măsură ce η creşte, factorul de aplificare A_O scade către zero, şi are loc fenomenul de autocentrare.

Trecerea prin zona de rezonanță, fie într-un sens fie în altul, nu este periculoasă dacă are loc într-un timp suficient de mic.

14.5. VIBRAȚII FORȚATE AMORTIZATE

Modelul mecanic al unui sistem elastic ce execută vibrații forțate amortizate este asemănător cu cel prezentat în figura 14.3, cu deosebirea că masei m, i se aplică o forță perturbatoare F(t) armonică. Un asemenea model complet este prezentat în figura alăturată 14.8.

Ecuația diferențială a mişcării este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \qquad (14.39)$$

Dacă se împarte la m, şi se utilizează notaţiile (14.18) ecuaţia (14.39) devine:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = \frac{F_O}{m} \sin \omega t. \qquad (14.40)$$

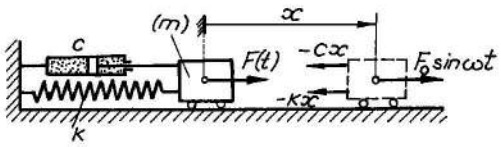


Fig. 14.8

Ecuaţia (14.40) este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi cu coeficienţi constanţi, neomogenă. Soluţia generală se compune, ca şi în cazul precedent, din soluţia ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară:

$$x(t) = x_{om} + x_p = ae^{-nt} \sin(p_1 t + \varphi) + X_O \sin(\omega t - \psi), \qquad (14.41)$$

în care $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$ este pseudopulsaţia vibraţiei libere amortizate, ω-pulsaţia forţei perturbatoare, a şi φ-constante de integrare, X_O şi ψ-amplitudinea şi faza iniţială a vibraţiei forţate.

Primul termen al soluţiei generale (14.41) reprezintă vibraţia proprie, iar al doilea, vibraţia forţată. Datorită amortizării, vibraţia proprie se anulează foarte repede, aşa că după trecerea fazei tranzitorii se poate considera soluţia staţionară dată numai de vibraţia forţată.

Înlocuind soluţia particulară $x_p = X_O \sin(\omega t - \psi)$ în ecuaţia diferenţială (14.40) şi identificând coeficienţii lui sin şi cos, rezultă:

$$X_O = \frac{F_O}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2 \left(\frac{\omega}{p}\right)^2}} = x_{st} \cdot A_1, \qquad (14.42)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\left(\frac{2n}{p}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{p}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2}, \qquad (14.43)$$

cu următoarele semnificații: x_{st} -deplasarea sistemului mecanic sub acțiunea forței statice F_O ; A_1 -factorul de amplificare în cazul vibrațiilor forțate amortizate, având expresia:

$$A_1 = \frac{X_O}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}}. \qquad (14.44)$$

Deoarece numitorul expresiei (14.44) este o sumă de pătrate, factorul de amplificare A_1 este finit pentru orice pulsație relativă $\eta=\omega/p$. Se poate defini o rezonanță de amplitudine, care are loc când factorul de amplificare devine maxim.

Se observă că pentru n=0, se regăseşte expresia factorului de amortizare A_O ce corespunde sistemului fără amortizare.

Reprezentarea grafică a factorului de amplificare A_1, pentru diferite valori ale amortizării 2n/p, în funcție de pulsația relativă $\eta=\omega/p$, este dată în figura 14.9.

Examinarea acestor curbe arată următoarele:

a) cu cât amortizarea este mai mare, amplitudinea la rezonanță este mai mică;

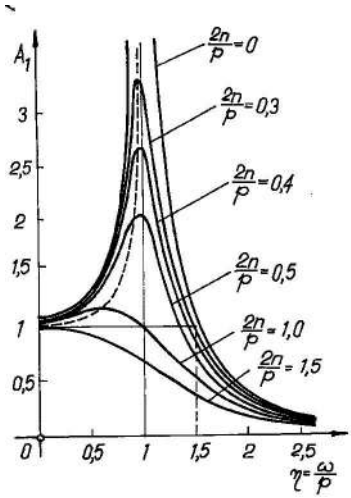


Fig. 14.9

b) efectul amortizării se resimte numai în vecinătatea zonei de rezonanță, în rest curbele practic coincid; rezultă că un amortizor este util pentru un sistem care lucrează în aproprierea rezonanței, sau ocazional, trece prin rezonanță;

c) pentru valori ale lui $\eta > 1{,}5$, amplitudinea vibrației forțate este mai mică decât săgeata statică $(X_O < x_{st})$ deoarece $A_1 < 1$;

d) curbele au maximul deplasat puțin în stânga rezonanței sistemelor neamortizate; pulsația de rezonanță se obține anulând derivata în raport cu η a factorului de amplificare A_1.

14.6. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se stabilească ecuația diferențială a mişcării şi perioada pentru sistemul vibrant din figura 14.10.

Rezolvare.Forța de amortizare în polul B este $F_B = c \cdot v_B$. forța din A se determină din egalitatea momentelor față de polul C:

$$F_A \cdot a = F_B \cdot b.$$

Rezultă

$$F_A = F_B \cdot \frac{b}{a} = c \cdot v_B \cdot \frac{b}{a}, \text{dar} \frac{v_B}{b} = \frac{v_A}{a},$$

deci

$$F_A = c \cdot v_A \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 = c\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \dot{x},$$

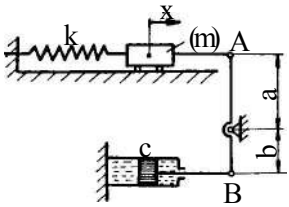


Fig. 14.10

unde x este deplasarea pe orizontală a masei m. Aplicând ecuația fundamentală a dinamicii, masei m, rezultă:

$$\text{sau} \quad m\ddot{x} = -kx - c \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \dot{x}, \quad \ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \dot{x} + \frac{kx}{m} = 0.$$

Masa m execută vibrații libere amortizate.Coeficientul de amortizare echivalent este:

$$c_e = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot c.$$

Pulsația vibrațiilor amortizate este:

$$p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c_e}{2m}\right)^2}.$$

2.3Un electromotor având greutatea Q = 8000 N este montat la capătul unui suport format din două grinzi orizontale, încastrate la celălalt capăt (fig14.11). Grinzile sunt confecționate din profile I din oțel având modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^{11} N/m^2$. Distanța de la axul motorului până la punctul de încastrare este l = 1 m. Rotorul electromotorului, de greutate P = 2000 N are o excentricitate e = 0,1 mm față de axa de rotație.

Turația de regim este n = 1000 rot/min.

Să se aleagă profilul I în așa fel încât amplitudinea vibrațiilor forțate să nu depășească a = 0,15 mm. La ce turație se produce fenomenul de rezonanță. Se neglijează greutățile grinzilor și forțele de amortizare.

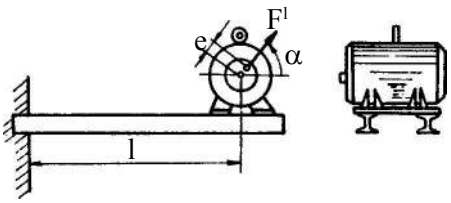


Fig. 14.11

Rezolvare. Proiecția pe verticală a forței perturbatoare, datorită excentricității rotorului, este:

$$F^{i} = \frac{P}{g} \cdot e\omega^2 \sin \omega t, \text{unde} \, \omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{1}$$

Ecuația diferențială a mișcării pe verticală a electromotorului are forma:

$$\frac{Q}{g} \ddot{y} = -ky - \frac{P}{g} \cdot e\omega^2 \sin \omega t. \tag{2}$$

Săgeata statică a suportului format din cele două profile I, este:

$$f_{st} = \frac{Ql^3}{3E(2I_z)}, \text{de unde} \, k = \frac{Q}{f_{st}} = \frac{6EI_z}{l^3}. \tag{3}$$

Ecuația diferențială (2) devine:

$$\ddot{y} + p^2 y = \frac{P}{Q} e\omega^2 \sin \omega t, \text{unde} \, p^2 = \frac{k}{Q} g = \frac{6gEI_z}{Ql^3}. \tag{4}$$

Vibrația forțată este dată de soluția particulară a ecuației diferențiale (2), fiind de forma $y = Y_O \sin \omega t$, unde amplitudinea vibrației forțate rezultă:

$$Y_O = \frac{P}{Q} \cdot e \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1}. \tag{5}$$

Profilul I se alege astfel încât, la pornirea electromotorului rezonanța să fie exclusă. Pentru aceasta este nevoie ca $p > \omega$. În acest caz, Y_O este pozitiv și trebuie să avem:

$$\frac{P}{Q}\cdot e\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2-1}\le a.sau\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\ge 1+\frac{P}{Q}\cdot\frac{e}{a}. \qquad (6)$$

Ținând seama de valoarea (4) a lui p, rezultă:

$$I\ge\omega^2\cdot\frac{Ql^3}{6gE}\left(1+\frac{P}{Q}\cdot\frac{e}{a}\right).$$

3.3 $\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3{,}14\cdot 1000}{30}=104{,}5s^{-1}$,

$$I\ge 104{,}5^2\,\frac{8000\cdot 1}{6\cdot 9{,}81\cdot 2{,}1\cdot 10^{11}}\cdot\left(1+\frac{2000\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}}{8000\cdot 0{,}15\cdot 10^{-3}}\right)=$$

$$=8{,}72\cdot 10^{-6}m^2.$$

Din tabele se alege un profil I 16 care are I=935 cm^4.

Pulsația proprie a sistemului este:

$$p=\sqrt{\frac{6gEI_z}{Ql^3}}=\sqrt{\frac{6\cdot 9{,}81\cdot 2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 935\cdot 10^{-8}}{800\cdot 1}}=117s^{-1}.$$

Amplitudinea vibrației forțate este:

$$Y_O=\frac{P}{Q}e\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2-1}=\frac{2000}{800}\cdot 0{,}1\cdot\frac{10^{-3}}{\left(\frac{117}{104{,}5}\right)^2-1}=0{,}1\cdot 10^{-3}<$$

$$<0{,}15\cdot 10^{-3}m.$$

Fenomenul de rezonanță se produce atunci când p = ω, adică

$\frac{\pi n_{rez}}{30}=117$, de unde: $n_{rez}=\frac{117\cdot 30}{\pi}=1120\ rot/min$.

14.7. PROBLEME PROPUSE

1. Dacă de resortul de lungime l_0 se suspendă greutatea G, el se alungeşte cu $\Delta l_0 = \frac{l_0}{4}$ Acest resort se aşează pe o masă orizontală cu frecare $\mu = 0{,}5$, având un capăt fixat în A (fig. 14.12). Masa m de greutate G de la capătul resortului se lansează cu viteza $v_0 = 10$m/s. Luând $l_0 = 0{,}5$m, să se calculeze unde se va opri prima dată masa m. (OB = ?)

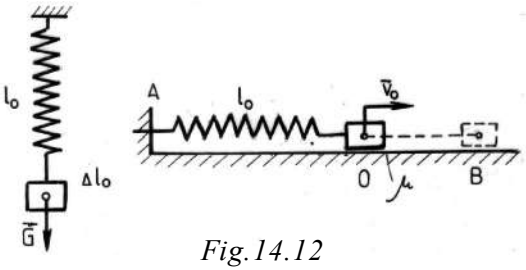


Fig.14.12

R: $\mathrm{OB} = \frac{9}{8}\mathrm{m}$

2. Două mase egale m = 5kg, sunt fixate de capătul unui resort pe care-l alungesc cu $\Delta l_0 = \frac{l_0}{4}$ unde $l_0 = 1$m (fig. 14.13). Se rupe firul şi cade una din mase. Se cere să se determine legea de mişcare a celeilalte mase rămase.

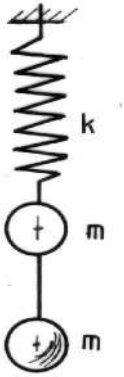


Fig.14.13

R: $\mathrm{x} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 9\mathrm{t}$

3. O masă m = 3kg legată de un resort se deformează static cu $\Delta l_0 = 0{,}1$m. Masei i se aplică o forță $P_0 = 20$N, oscilațiile având perioada $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{9{,}99}\mathrm{sec}$. (fig. 14.14). Să se

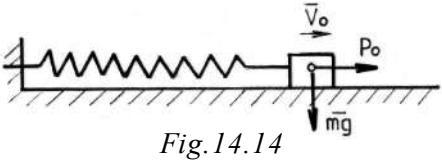


Fig.14.14

determine legea de mişcare a masei m ştiind că la $t = 0$ avem $x = 0$ şi $v_0 = 0$.

R: $x = \sin 10t + 60{,}6 \cdot \cos 9{,}99t$

4. Două arcuri sunt legate în serie (fig. 14.15). Primul arc are lungimea $l_1 = 1$m şi se alungeşte cu $\Delta l_1 = 0{,}1$m când de el este suspendată greutatea P = 30N. Al doilea arc are lungimea $l_2 = 1$m şi se alungeşte cu $\Delta l_2 = 0{,}2$m pentru acelaşi P. Sistemul este aşezat pe o masă orizontală, iar în capăt fixat corpul de masă m = 1kg. Dacă masa m se deplasează cu x_0 = 0,5m, să se determine legea de mişcare.

R: $x = \frac{1}{2}\cos 10t$

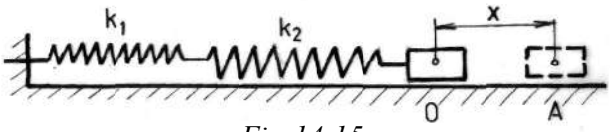


Fig.14.15

5. Mecanismul unui elipsograf este format din bara 1, de masă m articulată în O. Capătul opus este articulat de o altă bară 2, orizontală de masă 2m. Legătura între cele două bare este făcută prin intermediul unui arc spiral de constantă k = 19,6Nm/rad. Capetele A şi B glisează pe două ghidaje perpendiculare. Neglijând masele celor două culise, să se determine perioada micilor oscilaţii (vibraţii) ale sistemului. În poziţia reprezentată în figura 14.16 arcul este nedeformat.

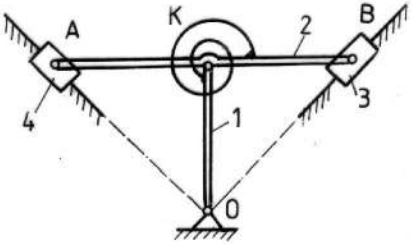


Fig.14.16

R: $T_0 = 0{,}293$s

6. Mecanismul hipocicloidal din figura 14.7.8 este format din tija 1 de masă M = 2,5m, articulată în A de un disc de rază r şi masă m. Discul 2 se poate rostogoli în interiorul unei suprafeţe cilindrice de rază R = 2r (fig. 14.17).

Să se determine pulsația micilor oscilații ale sistemului de corpuri.

R: $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{g}{r}}$

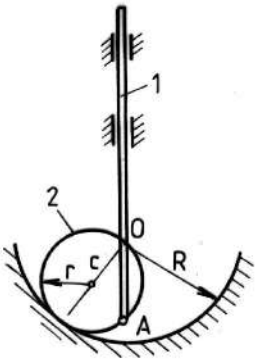


Fig.14.17

7. Să se verifice legea coservării energiei mecanice la x = 0, la t = 0 şi la extremitatea traiectoriei orizontale, în mişcarea masei m, dată de ecuațiile:

$$x = \sqrt{3}\cos \pi t + 3\sin \pi t; \quad \dot{x} = \cos \pi t - \sqrt{3}\sin \pi t$$

8. Sistemul de corpuri din figura 14.18 este format din corpul 1 de masă m_1 = 6kg, ce se poate deplasa într-un ghidaj vertical prin intermediul unui scripete 2 de masă m_2 = 4kg, şi un cablu având la un capăt montat un arc de constantă k = 4,8kN/m. Pentru atenuarea vibrațiilor corpul 1 este legat de un amortizor având constanta de amortizare c = 0,48kNs/m. Capătul arcului primeşte o excitație armonică S(t), de amplitudine S_0 = 4mm. Determinați pulsația de rezonanță a vibrațiilor şi amplitudinea la rezonanță.

R: $p = \omega_0 = 40s^{-1}$; x_{rez} = 2mm

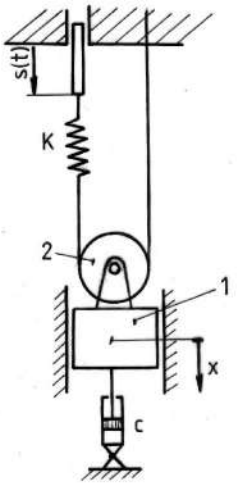


Fig. 14.18

9. Un corp cu masa M = 1kg execută oscilații armonice pe un plan orizontal (14.19). În momentul trecerii corpului prin poziția de echilibru, o bucată de plastilină cu masa m = 0,21kg se ataşează de aceasta. Cum se modifică amplitudinea oscilațiilor?

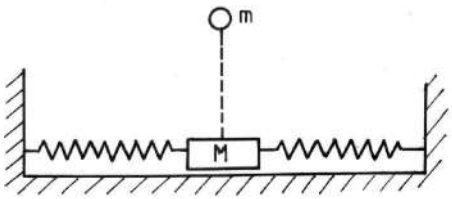


Fig.14.19

R: $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{M}{M+m}}$

10. Pe o suprafață orizontală se sprijină fără frecare un corp de masă M = 1kg, fiind prins între două resorturi identice de constantă k = 30N/m (fig. 14.20). Pe corp se află o șaibă cu masa m = 0,5kg. Sistemul corp-șaibă este pus în mișcare oscilatorie armonică. Determinați amplitudinea maximă a oscilațiilor pentru care sistemul poate oscila ca un întreg, fără ca șaiba să alunece pe corp. Coeficientul de frecare între corp și șaibă este $\mu = 0,4$ iar $g = 10m/s^2$.

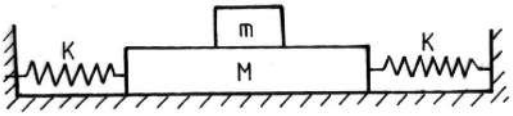


Fig.14.20

R: $A_{max} \le \dfrac{(m+M)\mu g}{2k} = 0,1m$

11. Aripa unui avion, având masa m este introdusă într-un tunel aerodinamic pentru efectuarea testelor. Ea este suspendată prin intermediul unui arc cilindric elicoidal de constantă k_1 și un arc spiral de constantă k_2, fixat în punctul A (fig. 14.21). Centrul de masă C al acestei aripi se află la distanța a față de punctul de suspendare. Cunoscând momentul masic de inerție J_A, să se determine ecuațiile diferențiale ale mișcării vibratorii și ecuația pulsațiilor proprii.

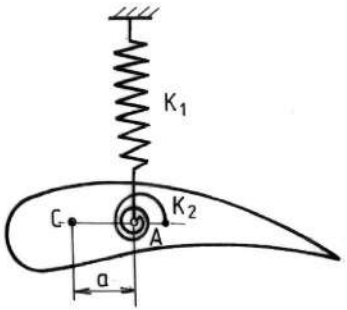


Fig.14.21

R:

$$J_c m\omega^4 - \left[J_c k_1 + m\left(k_2 + k_1 a^2\right)\right]\omega^2 + k_2 k_1 = 0$$

15

ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

15.1. Deplasari reale si deplasari virtuale 441
15.2. Principiul lucrului mecanic virtual (deplasarilor virtuale) 445
15.3. Principiul vitezelor virtuale (puterilor virtuale) 446
15.4. Principiul lui Torricelli 447
15.5. Ecuatiile lui Lagrange 448
15.5.1. Forte generalizate 448
15.5.2. Ecuatiile lui Lagrange de speta întâi 450
15.5.3. Ecuatiile lui Lagrange de speta a doua 451
15.5.4. Ecuatiile lui Lagrange în cazul fortelor conservative 453

15.6. Probleme rezolvate 454
15.7. Probleme propuse 473

15

ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

15.1. DEPLASĂRI REALE ŞI DEPLASĂRI VIRTUALE

Se consideră un punct material A, aflat la un moment dat într-o poziție oarecare, de vector de poziție $\vec{r}$, fie în stare de repaus fie în stare de mişcare, sub acțiunea unui sistem de forțe a căror rezultantă este $\vec{F}$.(vezi fig.15.1).

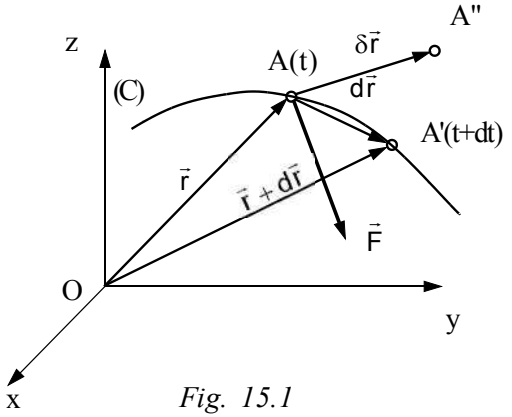


Fig. 15.1

Punctul se va deplasa din poziția sa reală A, de vector de poziție $\vec{r}$, într-o poziție infinit vecină A' de vector de poziție $(\vec{r} + d\vec{r})$,în timpul elementar dt.

Variația elementară a vectorului de poziție $d\vec{r}$,se numeşte deplasare reală infinitezimală, a punctului material.

Deci, deplasarea reală este o deplasare infinitezimală a unui punct material sau a unui corp pe suprafața sau curba care reprezintă legătura.

Această deplasare are loc sub acțiunea forțelor exterioare direct

aplicate şi este compatibilă cu legăturile.

Deplasarea reală ține seama de legea de mişcare şi se notează astfel:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \qquad (15.1)$$

Deplasarea reală corespunde cu noțiunea matematică de diferențială a funcției vectoriale $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Lucrul mecanic elementar al forței $\vec{F}$ ce acționează asupra punctului material, se exprimă sub forma:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (15.2)$$

În afară de deplasarea reală a punctului, se pot imagina şi alte deplasări imprimate arbitrar punctului material, fără a se ține seama de forțele exterioare care acționează asupra lui. O asemenea deplasare infinit vecină se poate considera deplasarea AA''. Deoarece poziția A'' este fictivă, deplasarea AA'' se numeşte deplasare virtuală şi se notează cu $\delta\vec{r}$.

Deplasarea virtuală este o deplasare infinitezimală a punctului sau a corpului considerat, posibilă sau fictivă, compatibilă sau necompatibilă cu legăturile. Această deplasare nu ține seama de legea mişcării punctului, este independentă de timp şi de forțele exterioare ce acționează asupra lui. Timpul este considerat, deci, un parametru constant şi arbitrar.

Deplasarea virtuală este de asemenea infinitezimală şi se notează:

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k} \qquad (15.3)$$

Lucrul mecanic corespunzător unei deplasări virtuale $\delta\vec{r}$, se numeşte lucru mecanic virtual şi se exprimă prin relația:

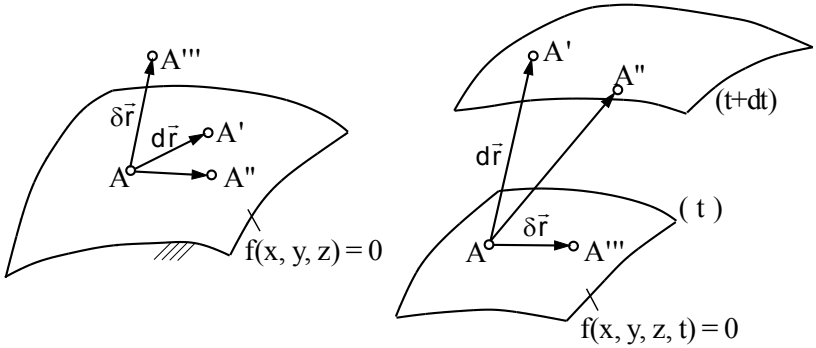
$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \qquad (15.4)$$

Deplasările elementare reale se notează cu simbolul d, iar cele virtuale cu δ, ambele simboluri având semnificația operatorului diferențial.

În cazul unui punct material A, obligat să rămână pe suprafața fixă de ecuație f(x, y, z) = 0, deplasările AA' şi AA'' sunt deplasări posibile, conținute în planul tangent la suprafață (vezi fig.15.2 a).

Această legătură este scleronomă şi olonomă, deoarece timpul nu apare explicit şi nici derivatele lui x, y, z. Legătura impune restricții pozițiilor punctului, nu şi vitezelor.

O **deplasare posibilă** reprezintă, deci orice deplasare compatibilă cu legăturile impuse, deplasarea reală fiind una din deplasările posibile.



a) legătură scleronomă şi olonomă

b) legătură reonomă şi olonomă

Fig. 15.2

Deplasările care nu sunt situate în planul tangent, sunt incompatibile cu legătura impusă punctului material, deci virtuale.

În cazul unei legături de tipul f(x, y, z, t) = 0, reonomă şi olonomă, cum se prezintă în figura 15.2 b, punctul este obligat să rămână în permanent contact cu o suprafață mobilă.

Deplasările AA' şi AA" sunt deplasări compatibile cu legătura, iar deplasarea AA"', o deplasare incompatibilă cu legătura.

Deplasările incompatibile cu legăturile pot deveni compatibile, dacă, înainte de efectuarea deplasării, punctul material este eliberat de legături şi se introduc forțele de legătură corespunzătoare.

La un sistem material cu mai multe legături, se poate suprima una din legături, înlocuind-o cu forța de legătură corespunzătoare. În asemenea cazuri o deplasare virtuală a sistemului material, este cea compatibilă cu legăturile rămase.

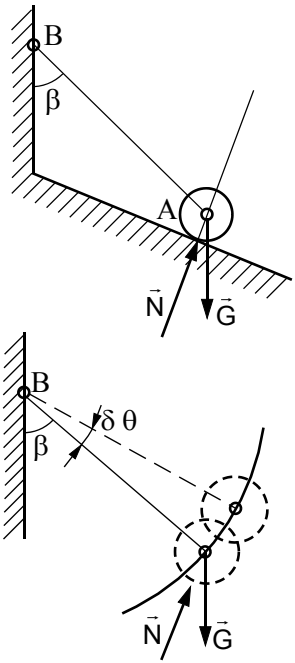


Fig. 15.3

De exemplu, la corpul din figura 15.3 se poate suprima legătura din A, introducând o reacțiune normală $\vec{N}$; deplasarea virtuală compatibilă cu legătura rămasă este o rotație infinitezimală $\delta\theta$ în jurul punctului B.

Din cele prezentate până aici, rezultă că deplasarea virtuală $\delta\vec{r}$ poate să corespundă şi cu o deplasare reală.

Deplasarea este virtuală deoarece nu ține seama de forțele ce acționează asupra sistemului iar timpul este un parametru arbitrar şi constant. Deplasările care nu respectă legătura, sunt numite deplasări virtuale incompatibile cu legătura.

Observație: Se precizează că deplasarea virtuală poate fi aplicată şi unui punct material aflat în repaus, spre deosebire de deplasarea reală, care are sens numai în probleme de dinamică.

Noțiunile de deplasare reală şi deplasare virtuală se pot aplica şi sistemelor de puncte materiale sau de rigide.

În cazul unui sistem de "n" puncte materiale A_i, de vectori de poziție $\vec{r}_i$, având coordonatele generalizate q_1, $q_2 \ldots q_h$, vectorii de poziție au expresia:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, q_3 \ldots q_h, t\right) \tag{15.5}$$

Deplasarea reală în cazul acestui sistem, a cărei poziție depinde de "h" parametrii geometrici independenți, are expresia:

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \tag{15.6}$$

sau

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad , \; i = 1, 2 \ldots n \tag{15.7}$$

Deplasarea virtuală are expresia;

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} dq_h \tag{15.8}$$

sau

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, i = 1,2 \ldots . n, \text{deoarece} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0 \tag{15.9}$$

15.2. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL (DEPLASĂRILOR VIRTUALE)

Principiul lucrului mecanic virtual este un principiu general care se aplică atât la rezolvarea problemelor de statică cât şi a celor de dinamică. Spre deosebire de celelalte metode, principiul deplasărilor virtuale prezintă avantajul că nu introduce în calcule forţele de legătură (dacă legăturile sunt ideale). Folosirea acestui principiu permite să se determine atât condiţiile de echilibru, cât şi ecuaţiile de mişcare ale unui sistem material supus la legături fără frecare, eliminând din ecuaţiile respective forţele de legătură. În cazul când este necesară determinarea unor reacţiuni este posibil a se folosi principiul deplasărilor virtuale după ce în prealabil legătura respectivă a fost suprimată şi înlocuită cu elementele mecanice corespunzătoare.

Pentru un punct material în echilibru static sau dinamic, rezultanta $\vec{F}$ a tuturor forţelor este nulă. Înmulţind scalar această forţă cu deplasarea virtuală $\delta\vec{r}$, obţinem lucrul mecanic virtual care este nul:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{15.10}$$

În cazul unui sistem de puncte în echilibru static sau dinamic, pentru orice deplasări virtuale, compatibile sau incompatibile cu legăturile, suma lucrurilor mecanice elementare virtuale corespunzătoare tuturor forţelor în echilibru, este nulă:

$$\delta L = \sum_{1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{15.11}$$

În problemele de statică în calculul lucrului mecanic virtual total trebuie introduse forţele exterioare, active şi pasive. Forţele interioare se introduc numai dacă sistemul cuprinde şi corpuri deformabile. Dacă legăturile sunt ideale, lucrul mecanic al forţelor pasive este nul.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^p = 0 \tag{15.12}$$

În problemele de dinamică în calculul lucrului mecanic virtual total, pe lângă forţele specificate anterior pentru statică, se introduc forţele de inerţie.

Astfel că:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^p + \vec{F}_i^i = 0 \tag{15.13}$$

În cazul unui sistem de puncte materiale supus la legături ideale (fără frecare) lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură este nul.

În problemele de statică, principiul lucrului mecanic virtual se scrie sub forma (15.11), în care $\vec{F}_i$, reprezintă forțele exterioare date, şi are **următorul enunț**: "condiția necesară şi suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale să se afle în repaus sub acțiunea unui sistem de forțe date, exterioare este ca lucrul mecanic virtual al acestor forțe să fie nul".

Pentru un sistem de puncte în mişcare expresia matematică a principiului lucrului mecanic virtual este:

$$\delta L = \sum_{1}^{n} \left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^i\right)\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (15.14)$$

Enunțul principiului este: "lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare, date şi a forțelor de inerție pentru un sistem de puncte în echilibru dinamic, pentru deplasări compatibile cu legăturile, este nul".

Pentru un sistem de rigide relația (15.14) se completează, introducând pentru fiecare rigid, torsorul forțelor de inerție:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^i\right)\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{M}_i^a + \vec{M}_i^i\right)\delta\theta_i \qquad (15.15)$$

Avantajul aplicării principiului lucrului mecanic virtual, față de alte metode studiate, constă în aceea că, pentru determinarea legii de mişcare a unui sistem material, sunt eliminate din calcule reacțiunile.

În cazul legăturilor cu frecare, forțele şi momentele de frecare, se pot introduce ca forțe şi momente exterioare date, luându-se astfel în considerare.

15.3. PRINCIPIUL VITEZELOR VIRTUALE (PUTERILOR VIRTUALE)

Principiul vitezelor virtuale reprezintă o altă formă de exprimare a principiului lucrului mecanic virtual, dat de relația (15.11):

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Considerând că deplasările virtuale $\delta\vec{r}_i$ au loc în acelaşi timp Δt,

rezultă că: $\delta\vec{r}_i = \vec{v}_i \Delta t$

iar $\delta L = \sum_1^n \vec{F}_i \vec{v}_i \Delta t = \Delta t \left(\sum_1^n \vec{F}_i \vec{v}_i \right) = 0$

Cum $\Delta t \neq 0$, expresia principiului vitezelor virtuale este:

$$\sum_1^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0 \qquad (15.16)$$

Adică: "suma puterilor virtuale dezvoltate de forţele exterioare, date şi de forţele de inerţie, este nulă".

Acest principiu se aplică în special mecanismelor pentru stabilirea condiţiilor de echilibru. Pentru aceasta se dă unui corp din sistem pe care-l considerăm element motor, o viteză virtuală arbitrară ca sens şi mărime, care să imprime sistemului o mişcare compatibilă cu legăturile sale. În continuare se efectuează o analiză cinematică, stabilind vitezele fiecărui corp şi în final se aplică principiul vitezelor virtuale dat de relaţia (15.16).

Forma generală a principiului vitezelor virtuale (puterilor virtuale) este:

$$\sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^i \right) \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \left(\vec{M}_i^a + \vec{M}_i^i \right) \cdot \vec{\omega}_i = 0 \qquad (15.17)$$

unde $\vec{v}_i$ şi $\vec{\omega}_i$ sunt vitezele virtuale.

15.4. PRINCIPIUL LUI TORRICELLI

Acest principiu este un caz particular al principiului lucrului mecanic virtual, când asupra sistemului acţionează numai greutăţile proprii, iar legăturile sunt ideale (fără frecare).

Înlocuind în expresia (15.11) a principiului lucrului mecanic virtual, forţele

$\vec{F}_i = \vec{G}_i = Z_i \vec{k} = -m_i g \vec{k}$, rezultă:

$$\vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right) = \sum_{i=1}^n z_i \delta z_i = -\sum_{i=1}^n m_i g \delta z_i = 0$$

Deoarece $X_i = Y_i = 0$, iar

$$\delta L = -g\delta\left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right) = -g\delta\left(Mz_c\right) = -gM\delta z_c = 0 \qquad (15.18)$$

unde M este masa sistemului de puncte iar z_c - cota centrului de greutate a sistemului. În această relație s-a aplicat teorema momentului static conform căreia:

$$\sum_{1}^{n} m_i z_i = M \cdot z_c \qquad (15.19)$$

Din relația (15.18) rezultă **principiul lui Torricelli** sub forma:

$$\delta z_c = 0 \qquad (15.20)$$

adică: "poziția de echilibru a unui sistem material, cu legături ideale, supus acțiunii greutății proprii, corespunde unui extrem al cotei centrului de masă".

Deci, centrul de masă al sistemului ocupă o poziție extremă care corespunde echilibrului nestabil când z_c este maxim, echilibru stabil când z_c este minim sau echilibru indiferent când z_c este constant.

Pentru determinarea condiției de echilibru se calculează la început coordonata z_c a centrului de masă față de un triedru fix, după care aceasta se diferențiază în raport cu parametrul ales pentru asigurarea echilibrului.

15.5. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

15.5.1. Forțe generalizate

Ecuațiile lui Lagrange permit determinarea ecuațiilor diferențiale ale mişcării unui sistem format din "n" puncte materiale sau corpuri, având "h" grade de libertate. Aceste grade de libertate sunt date de parametrii geometrici independenți (distanțe sau unghiuri) care determină complet poziția sistemului material la un moment dat, în raport cu un sistem de referință. Aceşti parametrii independenți se vor nota cu q_k (k = 1,2…h) şi poartă numele de coodonatele generalizate ale lui Lagrange.

Deci, numărul coordonatelor generalizate este egal cu numărul gradelor de libertate. Coordonatele generalizate permit efectuarea unui

studiu al mişcării într-un spaţiu cu mai multe dimensiuni. Legăturile mecanice ale sistemului material se consideră de tipul f(x,y,z,t) = 0, reonome şi olonome.

Întrucât poziţia întregului sistem depinde de cele h coordonate generalizate, vectorul de poziţie al unui punct din sistem va depinde de aceste coordonate şi de timp:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3 .... q_h, t), \text{ unde } i = 1,2,3...n \qquad (15.22)$$

Deplasarea virtuală $\delta\vec{r}_i$, concepută ca diferenţială este:

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_3}\delta q_3 + ... + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

sau $$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{h}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k, (i = 1,2,3....n) \qquad (15.23)$$

Deoarece deplasările virtuale sunt independente de timp şi independente între ele, $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} = 0$.

Notând cu $\vec{F}_i$ rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra punctului "i" din sistem şi cu $\delta\vec{r}_i$,deplasarea sa virtuală, lucrul mecanic virtual total în coordonate generalizate este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) = \sum_{k=1}^{h}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k \qquad (15.25)$$

Se notează: $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = Q_k$

Deci:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{h} Q_k\delta q_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + Q_3\delta q_3 + ... + Q_h\delta q_h \qquad (15.26)$$

Forţa generalizată Q_k are dimensiuni de forţă sau moment după cum coordonata generalizată q_k, are dimensiuni de distanţă sau unghi.

Forţa generalizată Q_k este o mărime scalară, care, amplificată cu

variația elementară a unei singure coordonate generalizate, dă lucrul mecanic efectuat de ansamblul forțelor care se exercită asupra sistemului când variază doar această coordonată.

Forța generalizată Q_k, se poate exprima astfel:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \text{sau} \frac{\delta L}{\delta q_k} \qquad (15.27)$$

Conform expresiei (15.27) forța generalizată Q_k este egală cu derivata lucrului mecanic total al forțelor ce acționează asupra sistemului, în raport cu coordonata generalizată q_k. Calculul unei forțe generalizate Q_k, corespunzătoare coordonatei generalizate q_k, se face determinând lucrul mecanic elementar virtual când variază numai q_k, cu δq_k, şi împărțind rezultatul final la δq_k.

15.5.2. Ecuațiile lui Lagrange de speța întâi

Se consideră un sistem format din "n" puncte materiale de mase m_i şi vectori de poziție $\vec{r}_i$, în raport cu un sistem de referință fix. Sistemul de puncte materiale are "h" grade de libertate. Pentru studiul mişcării sistemului material, se aplică mai întâi principiul lui D'Alambert şi apoi principiul lucrului mecanic virtual, pentru punctul A_i de masă m_i:

$$\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \qquad (15.28)$$

$$\left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \delta \vec{r}_i = 0 \qquad (15.29)$$

Relația (19.29) reprezintă principiul lucrului mecanic virtual pentru punctul A_i de masă m_i. Pentru întregul sistem de "n" puncte avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \delta \vec{r}_i = 0 \qquad (15.30)$$

Înlocuind expresia (15.23) a deplasării virtuale $\delta \vec{r}_i$ în (15.30) rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \qquad (15.31)$$

Inversând ordinea de însemnare în relația (15.31) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{h}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0 \qquad (15.32)$$

Deplasările virtuale δq_k (k = 1, 2...h), fiind independente între ele şi diferite de zero, pentru ca relația (15.32) să fie satisfăcută, este necesar ca coeficienții lor să fie nuli, adică:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = 0\text{, unde } k = 1, 2....h \qquad (15.33)$$

Relația (19.33) se poate scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \qquad (15.34)$$

Membrul stâng reprezintă forța generalizată Q_k, iar relația (19.34) devine:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\text{, unde } k = 1, 2....h \qquad (15.35)$$

Acest sistem de h ecuații (15.35) este cunoscut în literatura de specialitate sub denumirea de **ecuațiile lui Lagrange de speța întâi**. Acest sistem de ecuații reprezintă o sinteză a celor două principii diferențiale ale mecanicii analitice: principiul lui D'Alambert şi principiul lucrului mecanic virtual.

15.5.3. Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua

Deoarece folosirea ecuațiilor de mişcare sub forma (15.35) nu este comodă, forma lor poate fi prelucrată prin transformarea membrului drept, conform relației cunoscute:

$$\vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) - \vec{v}\frac{d\vec{u}}{dt} \qquad (15.36)$$

Membrul drept al relației (19.35) devine:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

Se poate arăta că: $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$ şi $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}$ (15.37)

Astfel, ţinându-se seama de relaţiile (15.22) şi (15.7) rezultă că:

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad , \quad i = 1, 2.....n \quad \text{şi}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad , \quad i = 1, 2.....n. \tag{15.38}$$

Derivând parţial această viteză, în funcţie de vitezele generalizate q_k, rezultă:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{15.39}$$

Pe de altă parte, inversând ordinea de derivare, în expresia:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \tag{15.40}$$

Înlocuind relaţiile demonstrate (15.39) şi (15.40) în (15.37) rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right) = \tag{15.41}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}\right)$$

Ştiind că: $\sum_{1}^{n}\frac{m_i\vec{v}_i^2}{2}=E$, este energia cinetică a sistemului, ecuaţiile lui Lagrange de speţa întâi se transformă în ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua, astfel:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial E}{\partial q_k}=Q_k,\quad k=1,2.....h \tag{15.42}$$

Relaţiile (15.42) cunoscute ca **ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua**, reprezintă un sistem de h ecuaţii diferenţiale corespunzătoare celor h coordonate generalizate.

15.5.4. Ecuaţiile lui Lagrange în cazul forţelor conservative

Ecuaţiile lui Lagrange (15.42) pot fi transformate dacă forţa generalizată Q_k derivă dintr-o funcţie de forţă $U(q_1, q_2 ....q_h, t)$ astfel încât:

$$Q_k=\frac{\partial U}{\partial q_k},\ \text{unde } k=1,2....h \tag{15.43}$$

În acest caz U se numeşte pseudofuncţie de forţă, iar forţa generalizată Q_k se numeşte conservativă.

Înlocuind expresia forţei generalizate conservative în (15.42) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_k}=\frac{\partial U}{\partial q_k},\ \text{unde } k=1,2....h \tag{15.44}$$

Trecând termenul din dreapta în stânga şi înlocuind funcţia compusă a lui Lagrange:

$$L=E+U=E-V \tag{15.45}$$

rezultă:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(E+U)}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial(E+U)}{\partial q_k}=0,\ \text{deoarece}\ \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}=0 \tag{19.46}$$

Deci $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0,\ \text{unde } k=1,2....h \tag{19.47}$$

Relaţiile (19.47) reprezintă o nouă formă a **ecuaţiilor lui Lagrange**, ecuaţiile generale de mişcare, pentru un sistem material supus la legături reonome şi olonome. Ele reprezintă un sistem de h ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, în raport cu coordonatele generalizate q_k, care în condiţii destul de largi, conduc la soluţii unice, care satisfac condiţiile iniţiale referitoare la poziţii $(q_k)_0$ şi viteze iniţiale $(\dot{q}_k)_0$ P.

Funcţia lui Lagrange, $\mathcal{L}$ = E - V, numită şi potenţial cinetic este egală cu diferenţa dintre energia cinetică totală a sistemului şi energia potenţială totală. Ea depinde de coordonatele generalizate q_k şi vitezele generalizate $\dot{q}_k$, şi de timp.

15.6. PROBLEME REZOLVATE

1. Pentru sistemul format din două bare articulate în C şi rezemate în A, B şi D, să se determine reacţiunea statică din A, cunoscând forţele P şi distanţa a (fig. 15.4).

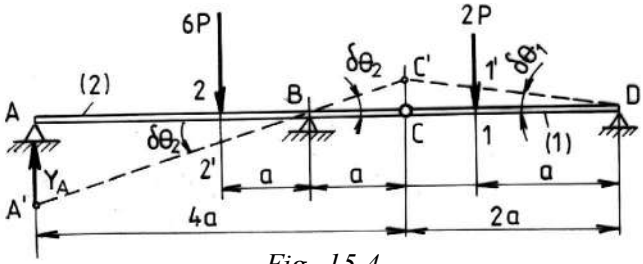


Fig. 15.4

Rezolvare:

Rezolvare: Se înlocuieşte reazemul A cu reacţiunea normală Y_A şi se dă o deplasare virtuală sistemului compatibilă cu legăturile rămase. Lucrul mecanic virtual total este:

$$\delta L = -Y_A \cdot 3a\delta\theta_2 + 6P \cdot a\delta\theta_2 - 2Pa\delta\theta_1 = 0$$

dar $CC' = 2a\delta\theta_1 = a\delta\theta_2$ de unde $\delta\theta_2 = 2\delta\theta_1$ înlocuind rezultă:

$$\delta L = -6Y_A a\delta\theta_1 + 12Pa\delta\theta_1 - 2Pa\delta\theta_1 = (-6Y_A + 12P - 2P)a\delta\theta_1 = 0$$

Rezultă că: $Y_A = \frac{10}{6}P$ Procedând în mod asemănător, rezultă şi celelalte reacţiuni din B şi D, respectiv $Y_B = \frac{16}{3}P$ şi $Y_D = P$.

2. Se dă sistemul de bare drepte rezemate în B, articulate în C, şi încastrate în A. Cunoscând forţele de acţiune P şi Q, unghiurile a şi b şi distanţa a, să se determine momentul de reacţiune din A.

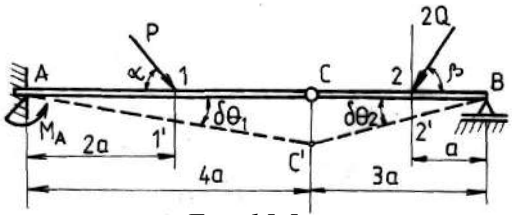


Fig. 15.5

Rezolvare:

Se înlocuieşte încastrarea cu o articulaţie, în care acţionează momentul de reacţiune M_A. Se dă o deplasare unghiulară virtuală sistemului de bare, compatibilă cu legăturile rămase (v. fig. 15.5) Lucrul mecanic virtual este:

$$\delta L = -M_A \cdot \delta\theta_1 + P\sin\alpha \cdot 2a \cdot \delta\theta_1 + 2Q\sin\beta \cdot a\delta\theta_2 = 0$$

dar $CC' = 4a\delta\theta_1 = 3a\delta\theta_2$, de unde $\delta\theta_2 = \frac{4}{3}\delta\theta_1$.

Înlocuind în δL rezultă:

$$\delta L = -M_A\delta\theta_1 + P\sin\alpha \cdot 2a\delta\theta_1 + 2Q\sin\beta \cdot a \cdot \frac{4}{3}\delta\theta_1 = 0$$

sau $\delta L = \left(-M_A + 2P\sin\alpha + \frac{8}{3}Q\sin\beta\right)\delta\theta_1 = 0$;

Rezultă: $M_A = 2a\left(P\sin\alpha + \frac{4}{3}Q\sin\beta\right)$

3. Aplicând principiul deplasărilor virtuale să se determine momentul de reacţiune din încastrarea A. (v. fig. 15.6,a). Asupra sistemului

acționează forța distribuită uniform q şi forțele P_1=6aq şi P_2= 0,5aq.

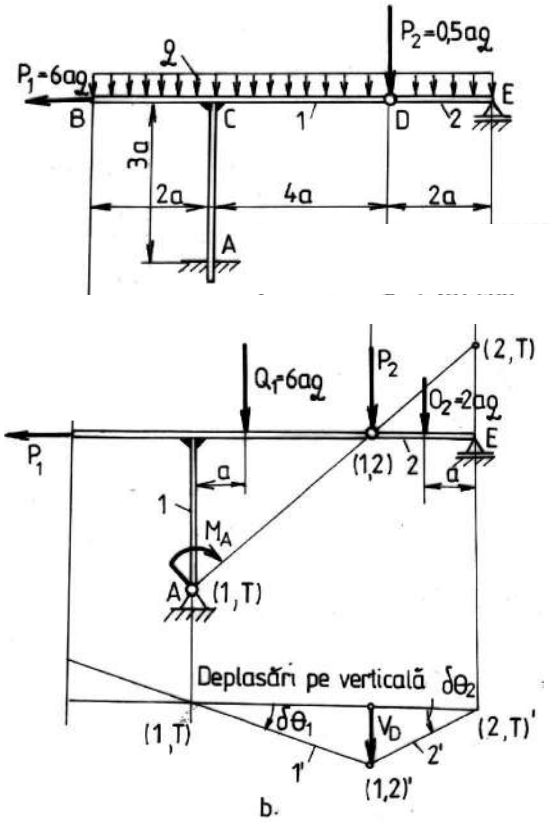


Fig. 15.6

Rezolvare:

Se înlocuieşte încastrarea A cu o articulație în care acționează momentul M_A, ce urmează a fi determinat. Se dă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile rămase. Corpul 1 se deplasează cu $\delta\theta_1$. iar corpul 2 cu $\delta\theta_2$ în jurul articulației A, respectiv reazemul E. Deplasarea pe verticală a articulației D este: $v_D = 4a\delta\theta_1 = 2a\delta\theta_2$, deci $\delta\theta_2 = 2\delta\theta_1$.

Lucrul mecanic virtual este:

$$\delta L = M_A \cdot \delta\theta_1 + aQ_1\delta\theta_1 + P_2 \cdot 4a\delta\theta_1 + Q_2 \cdot a\delta\theta_2 - P_1 \cdot 3a\delta\theta_1 = 0$$

sau:

$$\delta L = M_A\delta\theta_1 + 6a^2q\delta\theta_1 + 2a^2q\delta\theta_1 + 2a^2q\delta\theta_2 - 18a^2q\,\delta\theta_1 = 0$$

Înlocuind $\delta\theta_2 = 2\delta\theta_1$ rezultă:

$$\delta L = \left(M_A + 6a^2q + 2a^2q + 4a^2q - 18a^2q\right)\delta\theta_1 = 0\text{, de unde}$$

$$M_A = 6a^2q\,.$$

4. Asupra sistemului format din două bare cotite, articulate în A, B şi C acţionează forţele distribuite uniform, forţa unitară fiind q = 10kN/m (fig. 15.7). Să se determine reacţiunea orizontală din A, notată cu H_A.

Rezolvare:

Se înlocuieşte articulaţia A cu o rezemare în care acţionează pe orizontală necunoscuta H_A. Se dă sistemului de corpuri o deplasare compatibilă cu legăturile rămase după ce se stabileşte poziţia punctului (1, T) echivalentă cu CIR al elementului 1. Acest punct se află în prelungirea dreptei BC intersectată cu normala pe rezemarea AD. Introducând notaţiile corespunzătoare se reprezintă în figura 15.7 b, deplasările pe verticală şi pe orizontală ale punctelor structurii, devenită mecanism, prin înlocuirea articulaţiei. Poziţia punctului (1,T) se stabileşte prin raportul de asemănare al triunghiurilor formate. Deplasarea pe verticală a punctului C este: $v_c = 4\delta\theta_1 = 2\delta\theta_2$, deci $\delta\theta_2 = 2\delta\theta_1$

Lucrul mecanic virtual total pentru forţele H_A, Q_1 şi Q_2 este:

$$\delta L = -H_A \cdot 12\delta\theta_1 + Q_1 \cdot 0{,}5\delta\theta_1 + Q_2 \cdot 1\delta\theta_2 = 0\text{, sau}$$

$$\delta L = \left(-12H_A + 70 \cdot 0.5 + 20 \cdot 12\right)\delta\theta_1 = 0 \text{ de unde}$$

$$H_A = 6{,}25\,\text{kN}$$

5. Se dă sistemul format din trei bare, din figura 15.8, asupra căruia acţionează o forţă distribuită uniform q şi o forţă concentrată P=qa. Să se determine momentul M_A din încastrarea A. Se cunosc dimensiunile corpurilor prin cota a.

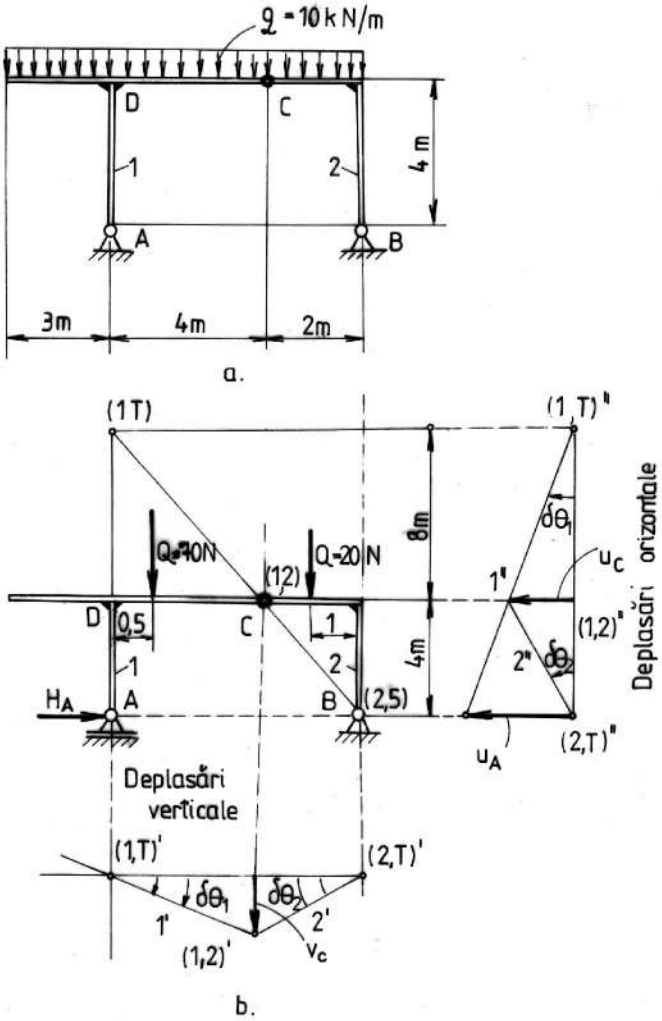


Fig.15.7

Rezolvare: Se transformă încastrarea A în articulație, în care acționează necunoscuta M_A. Sistemul format din trei corpuri se transformă în mecanism. Se dă sistemului o deplasare virtuală unghiulară compatibilă cu legăturile rămase. Se stabileşte poziția punctului(2,T) echivalentă cu CIR al elementului 2. Acest punct(2,T) se află la intersecția

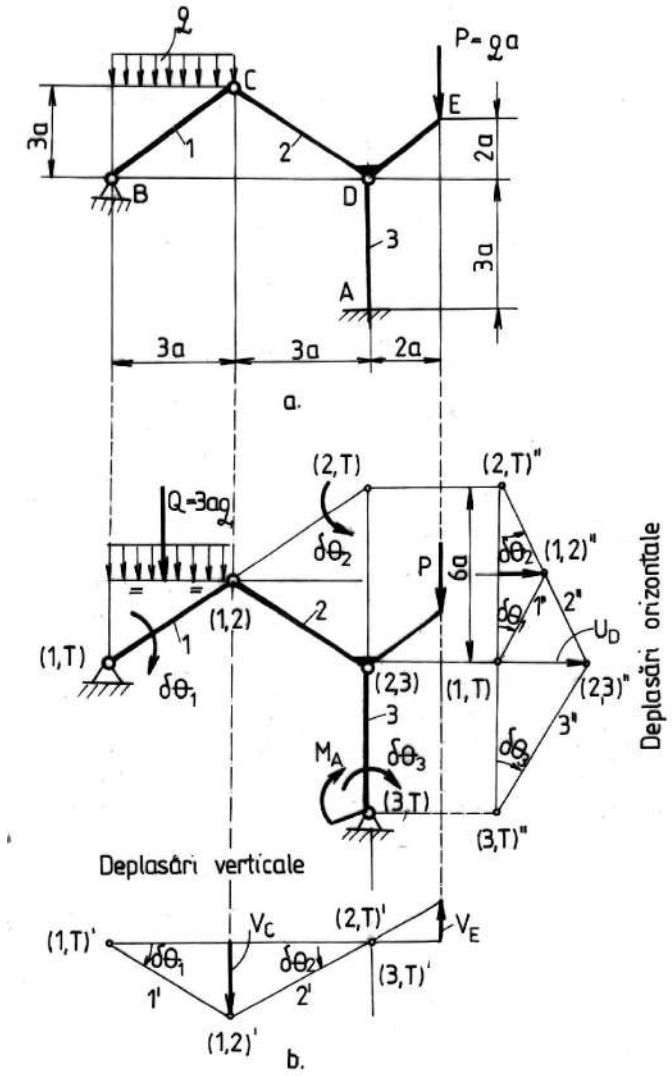


Fig.15.8

prelungirilor barelor 1 şi 3. Se introduc notaţiile corespunzătoare şi se stabilesc diagramele deplasărilor unghiulare şi liniare, pe orizontală şi verticală ale punctelor mecanismului. Relaţiile intre deplasările liniare şi

unghiulare rezultă din aceste reprezentări:

$v_c = 3a\delta\theta_1 = 3a\delta\theta_2$, deci $\delta\theta_1 = \delta\theta_2$ $u_D = 6a\delta\theta_2 = 3a\delta\theta_3$,

deci $\delta\theta_3 = 2\delta\theta_2 = 2\delta\theta_1$

Lucrul mecanic virtual total, pentru P, Q şi M_A corespunzător acestor deplasări liniare şi unghiulare este:

$$\delta L = M_A \cdot \delta\theta_3 - P \cdot 2a\delta\theta_2 + Q \cdot 1{,}5a\delta\theta_1 = 0 \text{ sau}$$

$$\delta L = 2M_A\delta\theta_1 - 2qa^2\delta\theta_1 + 4{,}5qa^2\delta\theta_1 = \left(2M_A - 2qa^2 + 4{,}5qa^2\right)\delta\theta_1 = 0$$

Rezultă: $M_A = -1{,}25qa^2$

6. Bara cotită articulată în A şi rezemată în B, din figura 15.9, este încărcată cu un sistem de forţe distribuite uniform forţa unitară fiind q. Cunoscând dimensiunile ei, să se determine momentul M_D din secţiunea D. (punctul de sudură dintre bara D B şi bara cotită A C E)

Rezolvare:

Punctul de sudură D, dintre cele două bare se înlocuieşte cu o articulaţie în care apar două momente de sensuri contrare M. Corpul iniţial devine mecanism format din două elemente 1 şi 2. Se determină poziţia punctului (2,T) echivalent cu CIR al elementului 2. Se stabileşte diagrama deplasărilor unghiulare şi verticale (v. fig.15.6.6.b) Lucrul mecanic virtual total este: $\delta L = M_D \cdot \delta\theta_1 + M_D\delta\theta_2 + Q \cdot 3{,}5a\delta\theta_1$ unde $Q = 7aq$.

Relaţiile între deplasările unghiulare sunt: $v_D = 4a\delta\theta_1 = 3a\delta\theta_2$, deci $\delta\theta_2 = \frac{4}{3}\delta\theta_1$. Înlocuind $\delta\theta_2$ şi Q în expresia lucrului mecanic virtual, rezultă:

$$\delta L = M_D \cdot \delta\theta_1 + M_D \cdot \frac{4}{3}\delta\theta_1 + 24{,}5qa^2\delta\theta_1 = \left(\frac{7}{3}M_D + 24{,}5qa^2\right)\delta\theta_1 = 0$$

Rezultă $\frac{7}{3}M_D + 24{,}5qa^2 = 0$ sau $M_D = -10{,}5qa^2$

7. Asupra sistemului de corpuri din figura 15.6.7, a articulate în A, B şi C acţionează două forţe P şi Q. Să se determine reacţiunea orizontală X_B din articulaţia B.

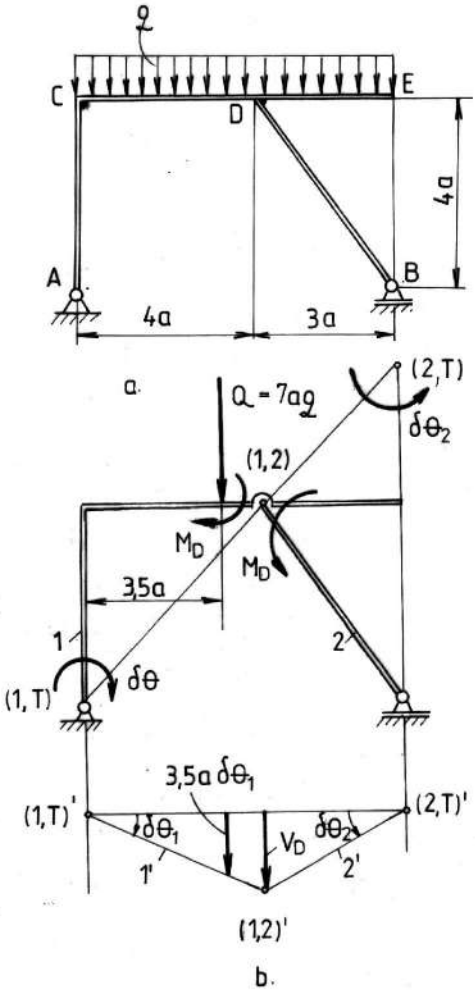


Fig. 15.9

Rezolvare:

Se înlocuieşte articulaţia B cu o rezemare în care acţionează necunoscuta X_B (fig. 15.10). Sistemul de corpuri devine mecanism. Centrul instantaneu al elementului 2 este $\dot{I}_2$ obţinut prin intersecţia dreptelor A C şi perpendiculara din B. Se dă o deplasare virtuală unghiulară faţă de

punctele A şi $\dot{I}_2$ respectiv $\delta\theta_1$ şi $\delta\theta_2$. Deplasările liniare ale punctelor C şi B sunt $\delta\bar{r}_c$ şi $\delta\bar{r}_B$ perpendiculare pe $A\dot{I}_2$ respectiv pe $B\dot{I}_2$. Relaţia între deplasări este: $\delta\bar{r}_c = AC\cdot\delta\theta_1 = \dot{I}_2C\cdot\delta\theta_2$ şi $\delta\bar{r}_B = \dot{I}_2B\delta\theta_2$. Deoarece $AC = CI_2 = R\sqrt{2}$ şi $\dot{I}_2B = 2R$ rezultă $\delta\theta_1 = \delta\theta_2$ şi $\delta r_B = 2R\delta\theta_1$.

Lucrul mecanic virtual total al forţelor P, Q şi X_B este:

$$\delta L = M_{A(P_1)}\cdot\delta\theta_1 + M_{\dot{I}_2(Q)}\cdot\delta\theta_2 + M_{\dot{I}_2(X_B)}\cdot\delta\theta_2 = \\ = aP\cdot\delta\theta_1 + bQ\cdot\delta\theta_2 - 2RX_B\cdot\delta\theta_2 \quad \text{sau}$$

$$\delta L = (aP + bQ - 2RX_B)\delta\theta_1 = 0, \text{ de unde } X_B = \frac{aP + bQ}{2R}$$

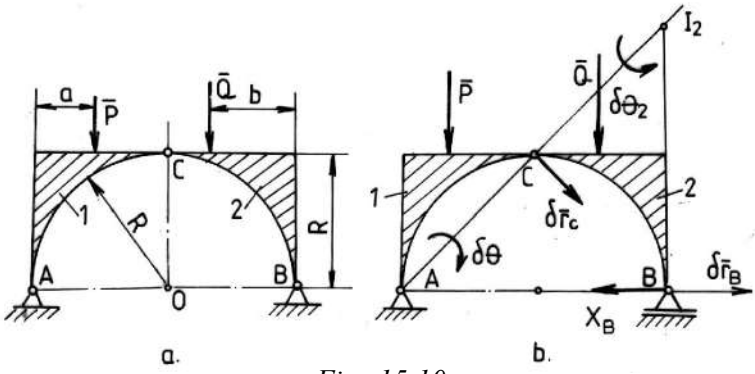


Fig. 15.10

8. Să se determine eforturile din barele C E şi B E ale grinzii cu zăbrele din figura 15.11, a încărcată cu forţele 2P şi $P\sqrt{3}$, în nodurile D, G şi B.

Rezolvare:

a) Efortul din bara CE se determină suprimând această bară şi înlocuind-o cu efortul N_5 şi $-N_5$.sistemul se transformă într-un mecanism cu un grad de libertate căruia i se determină centrele absolute şi relative. Se trasează cele două diagrame ale deplasărilor virtuale pe verticală şi orizontală ale nodurilor. Principiul lucrului mecanic virtual (fig. 15.11, b)

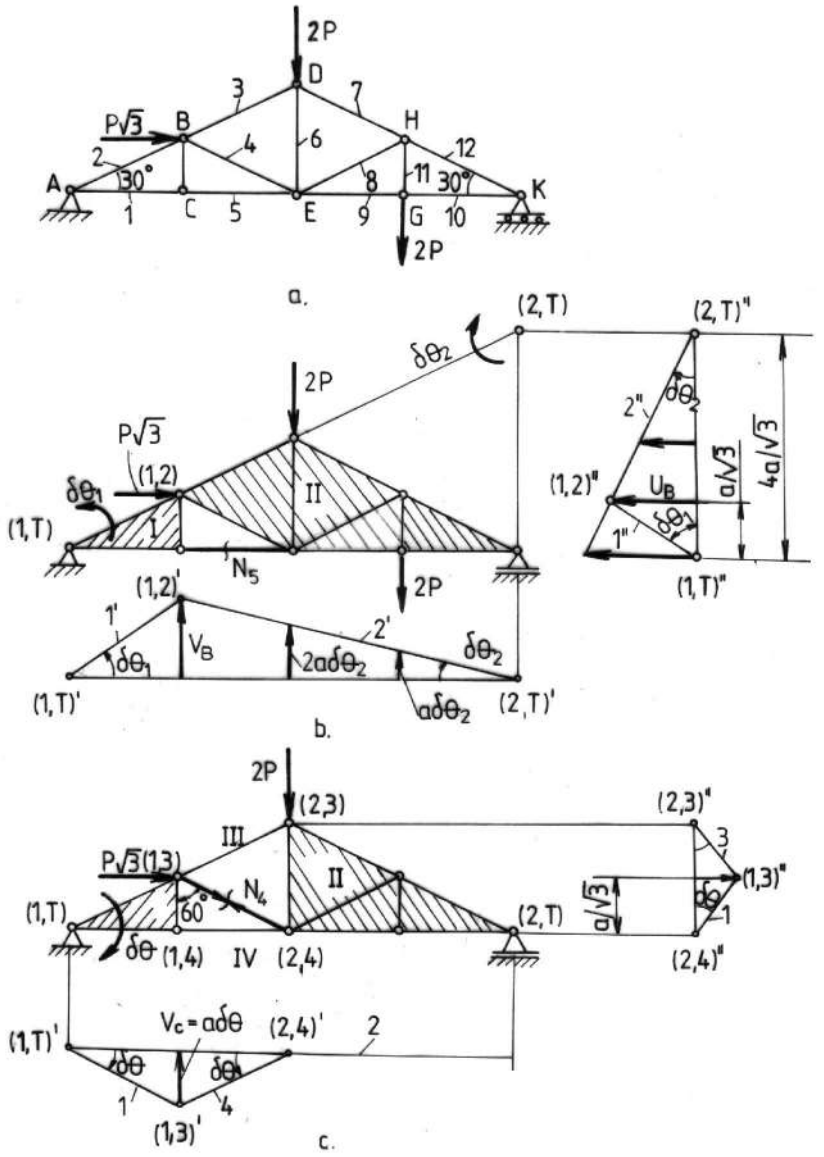

2P
D
3
7
P√3
B
H
4
6
12
2
30°
A
8
11
30°
K
1
C
5
E
9
G
10
2P
a.
(2,T)
(2,T)"
δθ2
2P
2"
δθ2
P√3
(1,2)
δθ1
II
a√3
4a/√3
(1,2)"
UB
(1,T)
1
N5
δθ1
1"
(1,T)"
2P
(1,2)'
1'
2'
δθ1
VB
2aδθ2
δθ2
(1,T)'
aδθ2
(2,T)'
b.
2P
(2,3)
(2,3)"
III
3
P√3(1,3)
N4
II
(1,3)"
(1,T)
60°
(2,T)
a/√3
δθ
1
δθ
(1,4)
IV
(2,4)
(2,4)"
(1,T)'
Vc = aδθ
(2,4)'
2
δθ
δθ
1'
4
(1,3)'
c.

Fig. 15.11

se scrie astfel:

$$\delta L = -2P \cdot 2a\delta\theta_2 - 2P \cdot a\delta\theta_2 - P\sqrt{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \delta\theta_1 + N_5 \cdot \frac{4a}{\sqrt{3}} \cdot \delta\theta_2 = 0 \ .$$

Relația între deplasări este: $v_B = a\delta\theta_1 = 3a\delta\theta_2$ deci $\delta\theta_1 = 3\delta\theta_2$. Lucrul mecanic virtual devine:

$$\delta L = \left(-2P \cdot 2a - 2P \cdot a - P \cdot 3a + N_5 \cdot \frac{4a}{\sqrt{3}} \right) \delta\theta_2 = 0 \ .$$

Deci $N_5 \cdot \frac{4a}{\sqrt{3}} = 9aP$ de unde $N_5 = \frac{9\sqrt{3}P}{4}$.

b) Efortul din bara BE se determină suprimând această bară care se înlocuieşte cu efortul N_4 şi $-N_4$. Sistemul se transformă într-un mecanism patrulater BCDE, căruia i se dă o deplasare unghiulară virtuală $\delta\theta$. Diagramele care reprezintă deplasările pe verticală şi orizontală ale diagramelor virtuale sunt reprezentate în figura 15.11,c.

Efortul N_4 din bara BE rezultă din condiția:

$$\delta L = P\sqrt{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \delta\theta + N_4 \left(\sin 60^0\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \delta\theta + N_4 \left(\cos 60^0\right) \cdot a\delta\theta = 0$$

$$\text{sau } \delta L = \left(Pa + N_4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} + N_4 \cdot \frac{1}{2} a \right) \delta\theta = 0 \text{ de unde } N_4 = P.$$

9. Să se determine efortul N din bara KC a grinzii cu zăbrele din figura 15.12. Asupra acestei grinzi acționează forțele P, 2P, 3P şi 4P. Iar lungimile barelor orizontale sunt egale cu a, şi unghiurile barelor din modul E este 30^0.

Rezolvare:

Efortul din bara KC se determină suprimând bara şi înlocuind legătura suprimată cu efortul $\overline{N}$ şi $-\overline{N}$. Suprimând această bară sistemul devine mecanism patrulater BCFK iar subsistemul II se poate roti în jurul lui E, devenit centru instantaneu de rotație. Dăm o deplasare unghiulară $\delta\theta$ în jurul acestui punct. Deplasările punctelor C, D şi F sunt perpendiculare pe razele instantanee. Efortul din bara KC rezultă din condiția:

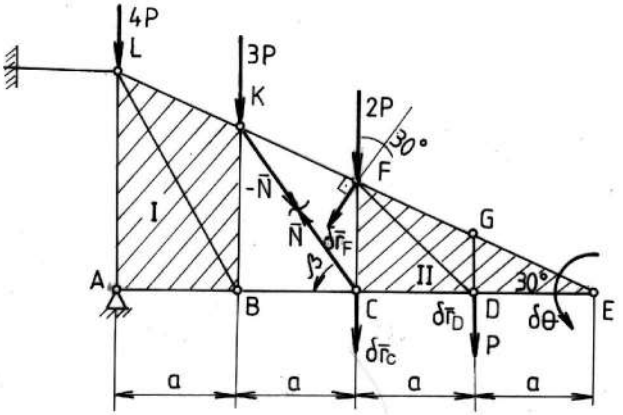


Fig. 15.12

$\delta L = P\delta r_D + 2P(\cos 30^0)\cdot \delta r_F - N\cdot(\sin\beta)\cdot\delta r_C = 0$, sau

$\delta L = P\cdot a\cdot\delta\theta + 2P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4a}{\sqrt{3}}\cdot\delta\theta - N\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2a\cdot\delta\theta$; deoarece

$\text{in}\beta = \frac{BK}{KC} = \frac{BEtg30^0}{KC} =$

$= \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deci:

$\beta = 60^0$ rezultă

$\delta L = \left(P + 4P - N\sqrt{3}\right)a\delta\theta = 0$

cu $N = \frac{5P\sqrt{3}}{3}$

10. Să se determine efortul N din bara CD a grinzii cu zăbrele din figura 15.13. Se dau forța P şi distanța a.

Rezolvare:

Se elimina bara CD şi se înlocuieşte cu efortul N. Structura BCDE devine

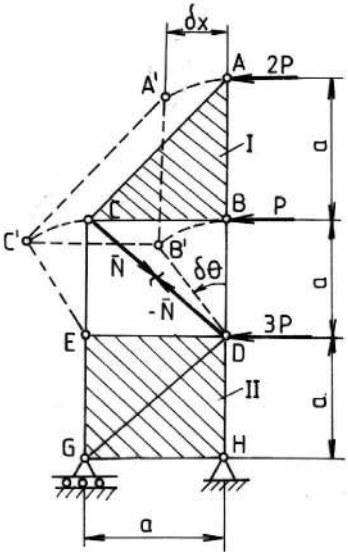


Fig. 15.13

mecanism paralelogram. Dăm o deplasare virtuală δx structurii I, translatată în poziția A' B' C'. Efortul din bara CD se determină din condiția:

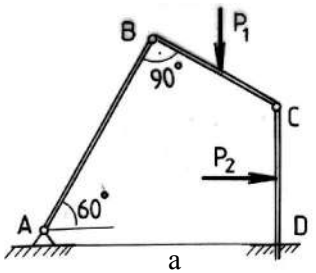
$$\delta L = 2P\delta x + P \cdot \delta x - N\cos 45^0 \cdot \delta x = 0 .$$

rezultă: $N = 3P\sqrt{3}$.

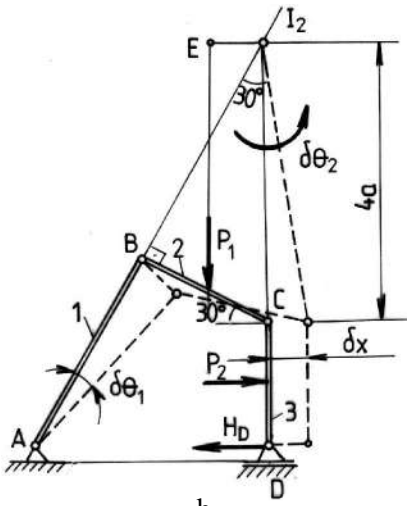
11. Asupra sistemului de bare din figura 15.14, acționează forțele P_1 şi P_2. La mijlocul barelor BC şi respectiv CD. Ştiind că lungimile acestor bare sunt egale BC=CD=2a,să se determine reacțiunea orizontală şi momentul de reacțiune din încastrarea D.

Rezolvare: Pentru determinarea reacțiunii orizontale H_D, transformăm încastrarea D în rezemare şi dăm o deplasare liniară virtuală orizontală δx, barei CD. (v. fig. 15.14,b)

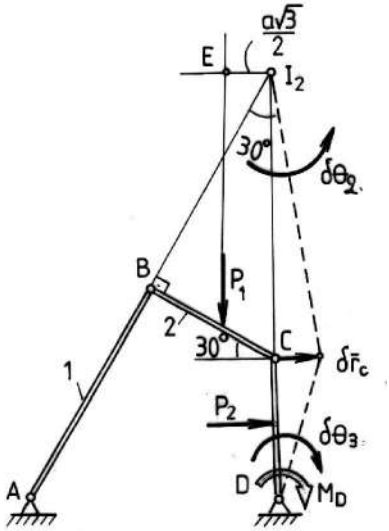
Lucrul mecanic virtual total al forțelor P_1, P_2 şi H_D este:



a



b



c

Fig. 15.14.

$$\delta L = -H_D \cdot \delta x + P_2 \cdot \delta x + P_1 \cdot (E\dot{I}_2) \cdot \delta\theta_2 =$$

$$= -H_D \cdot \delta x + P_2 \cdot \delta x + P_1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \delta\theta_2 = 0 \quad .$$

Ştiind că $EI_2 = a\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\delta x = 4a\delta\theta_2$. Rezultă:

$$\delta L = \left(-H_D + P_2 + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) \delta x = 0 \text{; deci } H_D = \frac{\sqrt{3}}{8} P_1 + P_2$$

b) Pentru determinarea momentului de reacţiune din încastrarea D se transformă în articulaţia D în care acţionează momentul M_D, necunoscut. Dăm o deplasare virtuală sistemului de corpuri, devenit mecanism patrulater(v. fig. 15.14,c). Momentul de reacţiune M_D rezultă din condiţia:

$$\delta L = M_D \delta\theta_3 + P_2 \cdot a\delta\theta_3 + P_1 \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \delta\theta_2$$

dar $\delta r_c = 2a \cdot \delta\theta_3 = 4a \cdot \delta\theta_2$, deci $\delta\theta_2 = \frac{1}{2}\delta\theta_3$.

Deci $\delta L = \left(M_D + aP_2 + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_1 \right) \cdot \delta\theta_3 = 0$, de unde

$$M_D = -\left(\frac{\sqrt{3}}{4} P_1 + P_2 \right) a \quad .$$

12. Să se determine relaţia dintre forţele P ,Q şi cuplul de moment M, astfel încât mecanismul din figura 15.15 să se găsească în echilibrul static. Bara AC este orizontală, iar OA = a, OB = b, OC = c şi unghiurile α şi β cunoscute.

Rezolvare:

Se dă o deplasare virtuală unghiulară $\delta\theta_2$ în jurul centrului instantaneu $\dot{I}$ al elementului AC. Elementele 1şi 3 vor primi deplasările $\delta\theta_1$ şi $\delta\theta_3$.

Condiția de echilibru exprimată prin lucrul mecanic virtual total este:

$$\delta L = \overline{Q}\delta\bar{r}_B + \overline{P}\cdot\delta\bar{r}_A - $$
$$-\overline{M}\delta\bar{\theta} = Q\cdot\delta r_B + $$
$$+ P\cos\alpha\cdot\delta r_A - M\cdot\delta\theta_3$$

dar

$$\delta r_B = b\cdot\delta\theta_1;$$

$$\delta r_A = a\cdot\delta\theta_1 = \dot{I}A\cdot\delta\theta_2;$$

$$\delta r_c = IC\cdot\delta\theta_2 = c\cdot\delta\theta_3$$

de unde rezultă

$$\delta\theta_3 = \frac{\dot{I}C}{c}\cdot\delta\theta_2 =$$

$$= \frac{\dot{I}C}{c}\cdot\frac{a}{\dot{I}A}\delta\theta_1 = \frac{a\sin\alpha}{c\sin\beta}\cdot\delta\theta_1$$

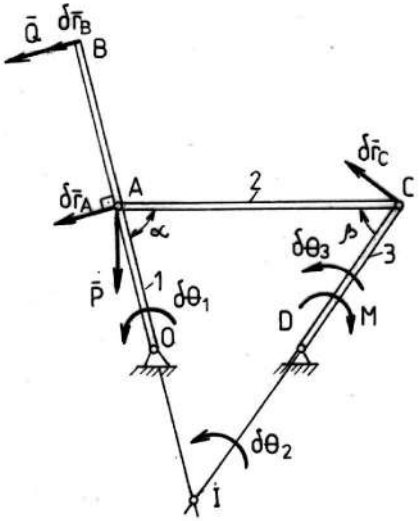


Fig. 15.15

Lucrul mecanic virtual este:

$$\delta L = Qb\delta\theta_1 + P(\cos\alpha)\cdot a\delta\theta_1 - M\cdot\frac{a\sin\alpha}{c\sin\beta}\cdot\delta\theta_1 = 0.$$

Deci $M = \dfrac{c\sin\beta}{a\sin\alpha}\cdot(Qb + Pa\cos\alpha)$.

13. Bara AB de lungimea *l* şi greutatea G se reazămă fără frecare în punctele A şi D. Să se determine unghiul α corespunzător poziției de echilibru a barei (v. fig. 15.16).

Rezolvare:

Se aplică principiul lui Toricelli $\delta Z_c = 0$. Față de sistemul de referință

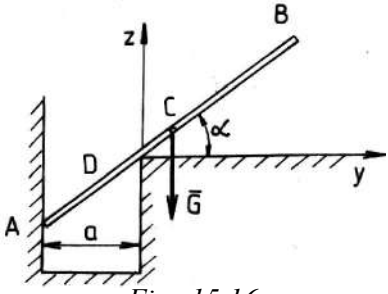


Fig. 15.16

cu originea în D, cota elementului de masă este: $Z_c = \frac{1}{2}\sin\alpha - a\,\mathrm{tg}\alpha$.

Prin diferențiere, rezultă

$$\delta Z_c = \frac{1}{2}\cos\alpha\cdot\delta\alpha - a\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\delta\alpha = \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{a}{\cos^2\alpha}\right)\delta\alpha = 0 \quad .$$

Pentru echilibru static $\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$.

14. În figura 15.17 se reprezintă suspensia cu mecanism paralelogram a unui scaun pentru autovehicule, asupra căruia acționează greutatea G a conducătorului auto. Pentru poziția reprezentată în figură cu unghiurile α şi β dimensiunile b, l, d să se determine forța din amortizorul 3.

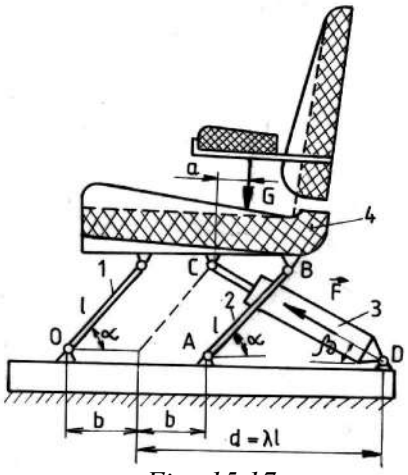


Fig. 15.17

Rezolvare: Relația între forța din amortizor $\overline{F}$. Şi greutatea conducătorului auto $\overline{G}$, se determină din condiția

$$\delta L = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_c + \vec{G}\cdot\delta\vec{r}_c = 0 \quad (1)$$

Față de un sistem de referință cu originea în o, vectorul de poziție al articulației C este :

$$\vec{r}_c = (b + l\cos\alpha)\vec{i} + l\sin\alpha\cdot\vec{j};\quad \vec{G} = -G\vec{j};$$

$$\vec{F} = -F\cos\beta\,\vec{i} + F\sin\beta\,\vec{j};$$

iar $\delta\vec{r}_c = -l\sin\alpha\,\delta\alpha\,\vec{i} + l\cos\alpha\,\delta\alpha\,\vec{j}$;

Înlocuind în relația(1), rezultă

$$\delta L = (Fl\cos\beta\cdot\sin\alpha + Fl\sin\beta\cos\alpha -$$
$$-Gl\cos\alpha)\,\delta\alpha = 0$$

Se obține: $F = \dfrac{G\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. (2)

Din teorema sinusului aplicată în triunghiul O'CD, rezultă:

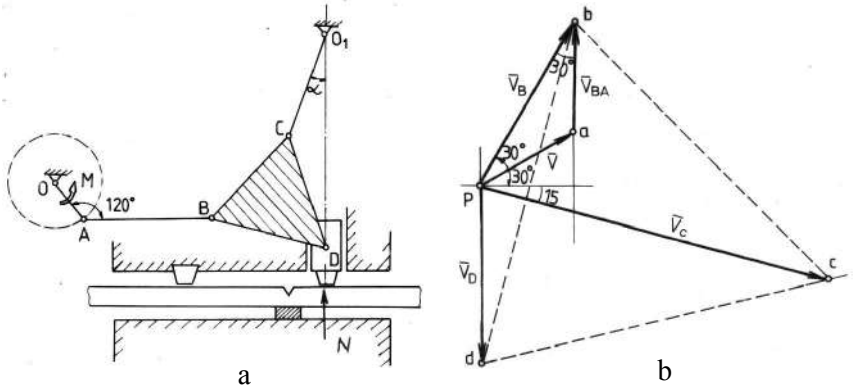
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha}} \quad (3)$$

Înlocuind(3) în (2) obținem în final forța de amortizor:

$$F = \frac{G}{d}(\mathrm{ctg}\alpha)\cdot\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha}$$

15. Mecanismul pentru divizarea pieselor turnate este acționat de momentul M prin intermediul manivelei OA = r. Biela AB transmite mişcarea pistonului D prin intermediul plăcii triunghiulare echilaterale BCD. Ştiind că: $AB \perp O_1D$, $O_1C = CD$, $\alpha = 15^0$ şi $OAB = 120^0$ (fig. 15.18).

Să se determine reacțiunea normală N din partea piesei turnate asupra pistonului D.



a b

Fig. 15.18

Rezolvare:

În punctul A acționează forța $F_A = \dfrac{M}{r}$, iar în D reacțiunea N. Legăturile între cele două forțe se poate obține în acest caz, cu principiul

vitezelor virtuale(puterilor virtuale) exprimat prin relația(8.4):

$$\sum_{1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i = \overline{F}_A \cdot \overline{V}_A - \overline{N} \cdot \overline{V}_D = 0$$

Se construieşte planul vitezelor pentru mecanism. Din figura 8.18, b rezultă următoarele: triunghiul pbd, este isoscel iar

$$V_D = V_B = \overline{pb} k_V$$

de asemenea triunghiul pab este isoscel iar

Vom obține: $V_D = V_B = \overline{pb} \cdot k_V = 2V_A \cdot \cos 30^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{pa} \cdot k_V$

$$V_A = \overline{pa} \cdot k_V = \overline{ab} \cdot k_V$$

unde k_V reprezintă scara la care s-a construit planul vitezelor. Înlocuind în prima relație rezultă $F_A \cdot \overline{pa} \cdot k_V = N \cdot \sqrt{3} \cdot \overline{pa} \cdot k_V$ sau $N = \frac{M\sqrt{3}}{3r}$.

16. Asupra roții(1) de greutate P şi rază R_1 acționează cuplul de moment M_m. Această roată pune în mişcare roata(2) de greutate G şi raze r_2 respectiv R_2 (fig. 15.19). Pe circumferința de rază R_2 Este înfăşurat un fir în capătul căruia este fixată greutatea Q. Să se determine cuplul motor astfel încât sistemul de corpuri să demareze cu accelerația unghiulară ε_1. Se cunoaşte raza de inerție a roții(2) $i_2 = \sqrt{r_2 \cdot R_2}$

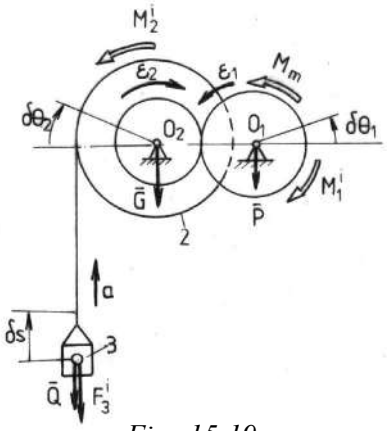


Fig. 15.19.

Rezolvare: Se reprezintă forțele şi momentele de inerție în sens invers accelerațiilor liniare şi unghiulare. Se dă sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile. Lucrul

mecanic virtual al forțelor şi momentelor, active şi de inerție este:

$$\delta L = M_m \cdot \delta\theta_1 - M_1^i \delta\theta_1 - M_2^i \delta\theta_2 - Q\delta S - F_3^i \delta S = 0; \qquad (1)$$

Relațiile între deplasările virtuale sunt:

$$R_1 \delta\theta_1 = r_2 \delta\theta_2;$$

$\delta S = R_2 \delta\theta_2$, de unde

$$\delta\theta_2 = \frac{R_1}{r_2}\delta\theta_1;\ \delta S = \frac{R_1 R_2}{r_2}\delta\theta_1;$$

Relațiile între accelerații sunt: $R_1\varepsilon_1 = r_2\varepsilon_2$; $a = R_2\varepsilon_2$, de unde

$$\varepsilon_2 = \frac{R_1}{r_2}\varepsilon_1;\ a = \frac{R_1 R_2}{r_2}\varepsilon_1;$$

Expresiile forțelor şi momentelor de inerție sunt:

$$F_3^i = m_3 a = \frac{Q}{g}a = \frac{Q}{g}\frac{R_1 R_2}{r_2}\varepsilon_1;$$

$$M_1^i = J_1 \cdot \varepsilon_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1 = \frac{PR_1^2}{2g}\varepsilon_1;$$

$$M_2^i = J_2 \cdot \varepsilon_2 = R_2 \cdot r_2 \cdot \frac{G}{g} \cdot \frac{R_1}{r_2} \cdot \varepsilon_1.$$

Înlocuind în expresia lucrului mecanic virtual, rezultă:

$$\delta L = \delta\theta_1 \left(M_m - \frac{PR_1^2}{2g}\varepsilon_1 - R_2 \cdot r_2 \frac{G}{g} \cdot \frac{R_1}{r_2} \cdot \varepsilon_1 - Q\frac{R_1 R_2}{r_2} - \frac{Q}{g}\left(\frac{R_1 R_2}{r_2}\right)^2 \varepsilon_1 \right) = 0$$

sau $$M_m = Q\frac{R_1 R_2}{r_2} + \left[\frac{PR_1^2}{2g} + \frac{GR_1 R_2}{g} + \frac{Q}{g}\left(\frac{R_1 R_2}{r_2}\right)^2 \right] \varepsilon_1$$

15.7. PROBLEME PROPUSE

1. Două bare de greutate G şi lungimea $3l$ sunt articulate în A la distanța AB = AB' = l (fig. 15.20). Pentru a sta sub un unghi $2\theta = 60^o$ suntr legate cu un fir orizontal la distanța a) $x = \frac{AB}{2}$; b) $x' = \frac{AC}{2}$. Să se calculeze tensiunea din fir.

R: a) $T = G\sqrt{3}$; b) $T = 2G\frac{\sqrt{3}}{3}$

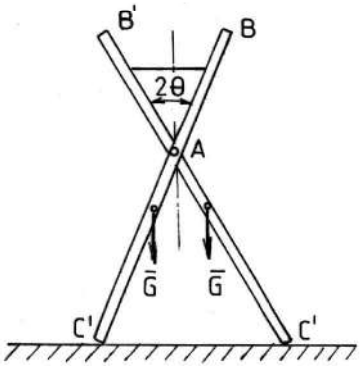


Fig. 15.20

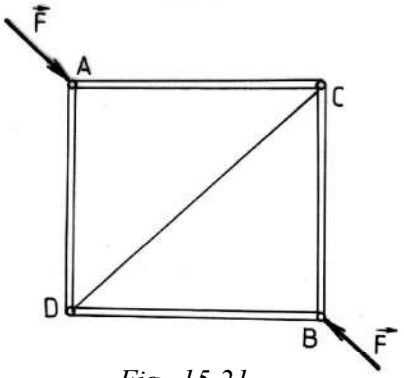


Fig. 15.21

2. Patru bare egale de lungimea l, sunt articulate între ele astfel încât într-un plan orizontal formează un pătrat (fig. 15.21). Vârfurile C şi D sunt legate între ele printr-un fir elastic de lungime naturală $l_0 = l\sqrt{2}$ (în poziția inițială firul este întins). Se cer forțele F în cele două vârfuri, perpendiculare pe fir, astfel încât firul să capete lungimea $\frac{5l_0}{4}$. Acest fir atârnat vertical, cu greutatea G la capăt se alungeşte cu $\frac{l_0}{2}$.

R: F=0,265 G

3. O sferă de greutatea G şi raza R se reazemă pe bara AB de greutate 2G şi lungimea 4R (fig. 15.22). Sistemul este prins de un perete cu un fir orizontal. Să se determine tensiunea în fir când $\alpha = 60^o$.

R: $T = G\left(\sqrt{3}+1\right)$

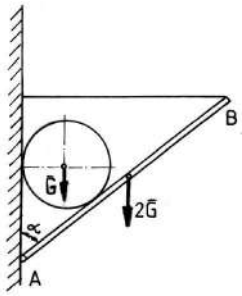


Fig.15.22

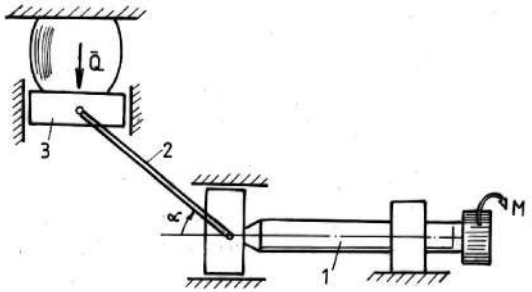


Fig. 15.23

4. Şurubul *1* al mecanismului de presare din figura 15.23 are pasul h. Asupra lui acţionează cuplul de moment M ce transmite forţa de presare prin intermediul barei articulate 2 ce formează unghiul α cu orizontala. Să se determine forţa de reacţiune Q din partea piesei presate, asupra pistonului 3.

R: $Q = \dfrac{2\pi M}{h} tg\alpha$

5. Două bare de lungimea l_1 şi greutate G_1 respectiv l_2; şi greutate G_2 sunt articulate în B. În C se reazemă bara BC pe un plan orizontal, iar în A este articulată bara AB (fig. 15.24). Cunoscându-se unghiurile α şi θ şi distanţa h să se determine forţa P orizontală, necesară pentru această poziţie de echilibru.

R: $P = \dfrac{(G_1 + G_2)\cos\alpha\cos\theta}{2\sin(\alpha+\theta)}$

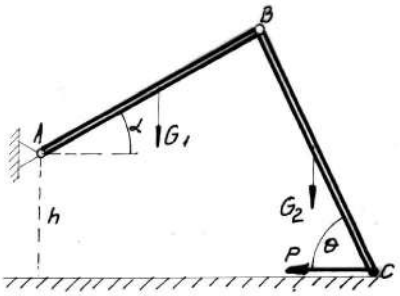


Fig. 15.24

6. Să se determine reacţiunile din încastrarea A pentru grinda din figura 15.25, ştiind că: $M_0 = qa^2$; şi F = qa, unde q este forţă unitară.

R: $M_A = 4qa^2$; $Y_A = -\frac{3}{2}qa$

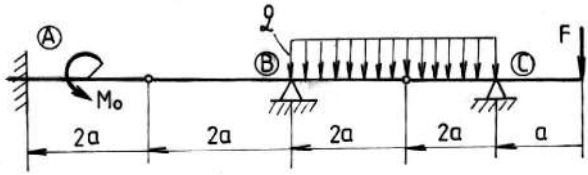


Fig. 15.25

7. Aplicând metoda deplasărilor virtuale să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 15.26, ştiind că AB = AC = a, CD = 2a.

R: $S_1 = S_2 = S_3 = -P$;

$S_4 = -\frac{P\sqrt{5}}{2}$; $S_5 = P\sqrt{2}$

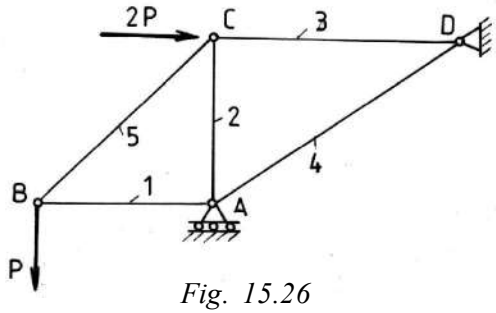


Fig. 15.26

8. Mecanismul limitator pentru deschiderea orificiului de eliminarea zgurei din furnale este prezentat în figura 15.27. Orificiul este normal închis, sub acţiunea contragreutăţii A de greutate P. Mecanismul are bielele CK = DF, BE = OO_1 = O_2O_3 =CD În poziţia de funcţionare normală OB formează unghiul α, cu verticala, iar KC unghiul β. Să se determine forţa Q de apăsare asupra dopului 2, dacă OB = b, OA = a, $\sphericalangle BOA = 90^0$; $\sphericalangle PCD = 90^0$.

R: $Q = \frac{aP\sin\beta\cos\alpha}{b\sin(\alpha+\beta)}$

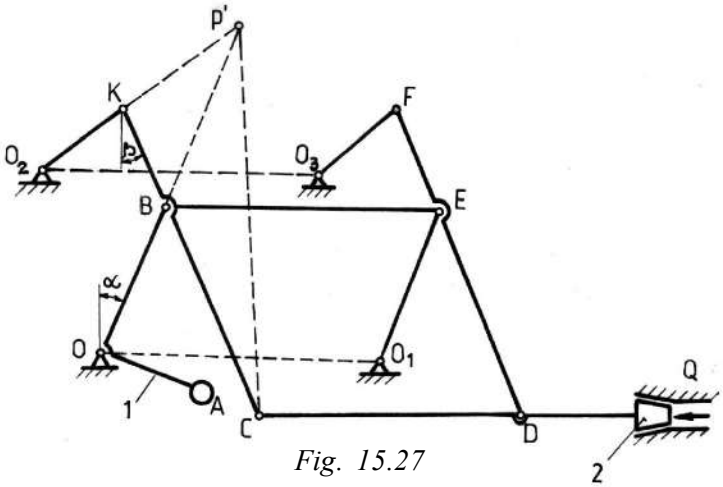


Fig. 15.27

9. Masa orizontală pentru ridicarea laminatelor, prezentată în figura 15.28, este acționată de manivela $OA = O_1D = r$ și momentul M. Dacă laminatul are greutatea Q și masa este în poziția orizontală, să se determine deformația f a arcului al cărui capăt apasă pe pârghia D. Se cunoaşte coeficientul K de elasticitate al arcului şi $\sphericalangle DO_1B = 90^0$.

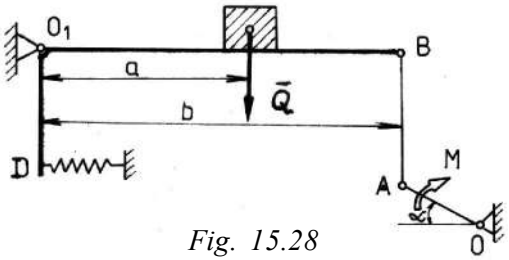


Fig. 15.28

R: $f = \dfrac{(Mb - Qar\cos\alpha)}{kr^2\cos\alpha}$

10. Aplicând principiul deplasărilor virtuale să se determine reacțiunea din reazemul B, pentru sistemul de bare din figură. Barele au greutăți neglijabile iar forțele aplicate au mărimile cunoscute indicate pe desen (fig. 15.29).

R: $N_B = P$

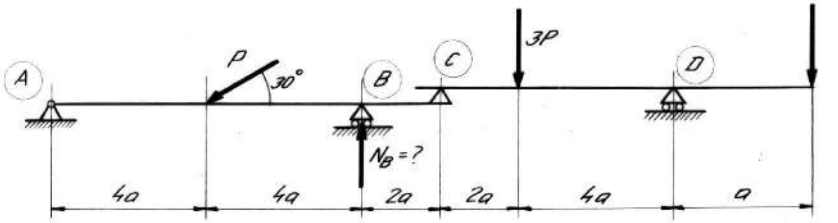


Fig. 15.29

11. Mecanismul de reglare a lagărului axial din figura 15.30 este acționat de momentul M prin intermediul angrenajului cu roțile conice 2 si 3 de raze r_2; r_3 și a șurubului 4 cu pasul h. Știind că pana de reglare are unghiul α și lagărul axial este acționat de forța Q să se determine momentul M.

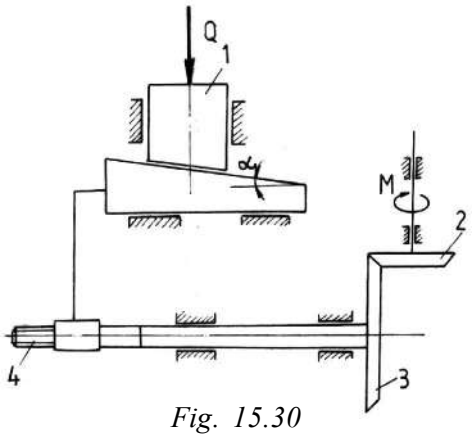


Fig. 15.30

R: $M = \dfrac{Q r_2 h}{2\pi r_3} \operatorname{tg}\alpha$

12. Două bare legate de greutate G și lungime *l*, sunt așezate ca în figura 15.31. și legăturile cu un fir CE. Să se determine tensiunea din fir la echilibru, cunoscând unghiurile α și θ.

R:

$$T = \frac{2G\sin\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cdot\sin\alpha - 2\cos\alpha\sin\theta}$$

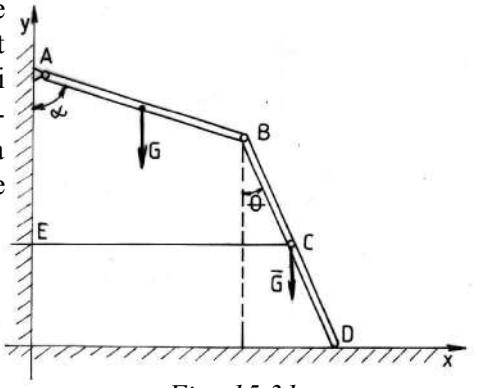


Fig. 15.31

13. Patru bare de greutate G şi lungime *l* se reazemă pe două cuie C şi C', având distanţa 2a între ele (fig. 15.32). Se cere unghiul α sub care se aşează sistemul de echilibru. În D acţionează forţa P

R: $\sin^3\alpha = \dfrac{(4G+P)}{(4G+2P)}\cdot\dfrac{a}{l}$

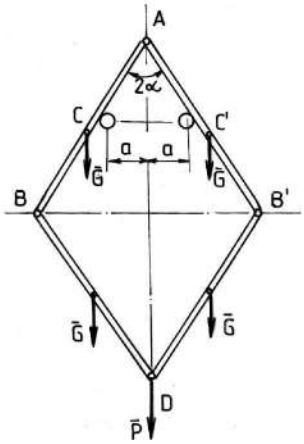


Fig. 15.32

14. Fie două bare AB şi CD de greutate 2G şi o lungime 2*l* din care este articulată bara BD, de greutate G şi lungimea *l*. Pentru a obţine poziţia din figura 15.33 se leagă sistemul cu un fir vertical AD. Să se detrmine tensiunea din fir

R: T = 3 G

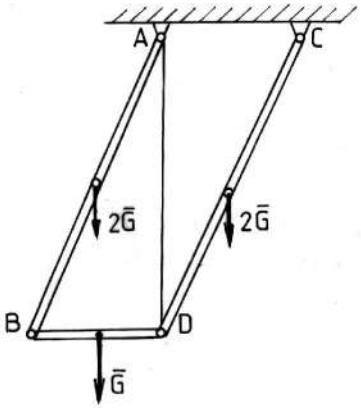


Fig.15.33

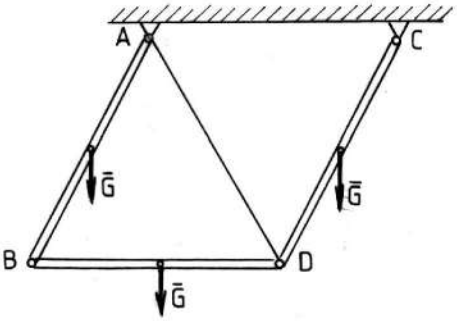


Fig. 15.34

15. Trei bare egale de greutate G şi lungimea *l* sunt legate cu firul AD de lungimea *l* (fig. 15.34). Se cere la echilibru tensiunea din fir.

R: $T = \dfrac{G}{2}\left(5-2\sqrt{3}\right)$

16. Patru bare sunt articulate în A de un tavan. Barele BC şi BC' au greutatea G şi lungimea *l*, iar barele AC şi C'A au greutatea P şi lungimea $l\sqrt{3}$ (fig. 15.35). Firul AB care ţine sistemul în echilibru are lungimea *l*. Se cere forţa T în fir, la echilibru.

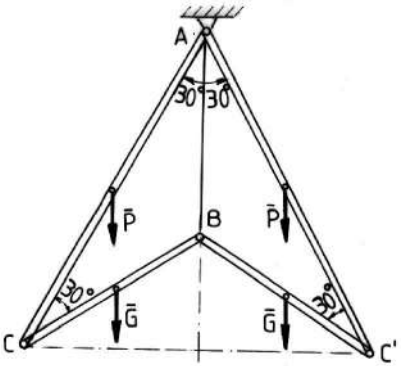


Fig. 15.35

R: $T = \dfrac{G - P}{2}$

17. Fie patru bare articulate. Barele AB şi A'B' au greutatea 2G şi lungimea 2*l*, iar barele BC şi B'C au greutatea G şi lungimea *l*. Pentru a sta în poziţia din figură, barele sunt legate cu un fir vertical (fig. 15.36). Să se determine forţa T din fir.

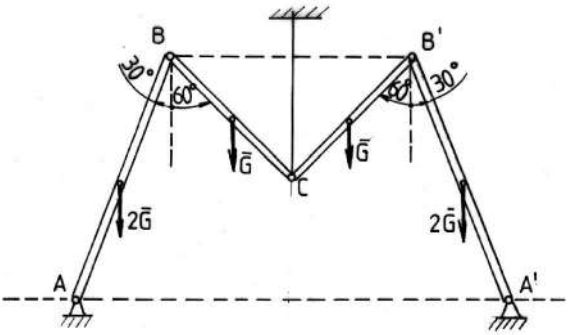


Fig. 15.36

R: $T = \dfrac{7G}{4}$

18. Sistemul de corpuri din figura 15.37 se pun în mişcare din acţiunea greutăţilor proprii. Să se determine acceleraţia cu care coboară corpul(1), de greutate 5Q cunoscând: forţa Q, razele R, raza de inerţie a corpului(2), $i_2 = R\sqrt{2}$, unghiul α şi coeficientul de frecare la rostogolire s.

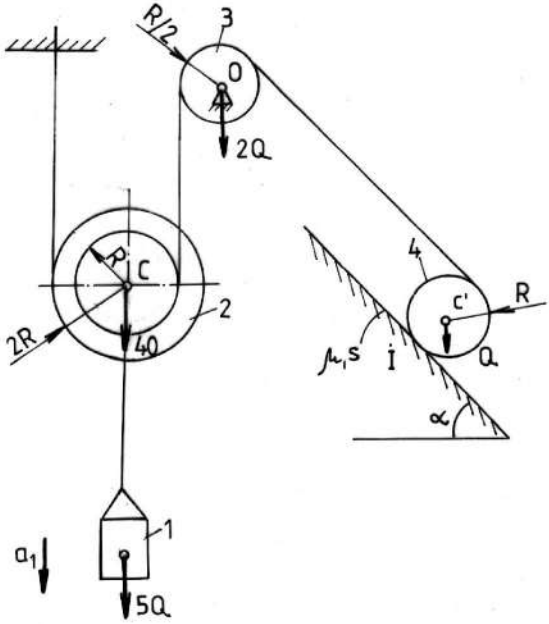


Fig.15.37

R: $a_1 = \dfrac{6 - \sin\alpha - \dfrac{s}{2R}\cos\alpha}{6 + \dfrac{33}{16}} g$

19. Să se determine momentul motor M_m ce trebuie aplicat la axul rotii(1), pentru ca sistemul de corpuri din figura 15.38, să demareze cu accelerația unghiulară ε_1. Se cunosc razele R_1, R_2, R_3, forța Q şi momentele masice de inerție J_1 ;şi J_2 Se neglijează masele scripetilor(3) şi (4) de raza r şi frecările din sistem.

R: $M_m = J_{red} \cdot \varepsilon_1 + \dfrac{Q}{2} \cdot \dfrac{R_1 R_3}{R_2}$

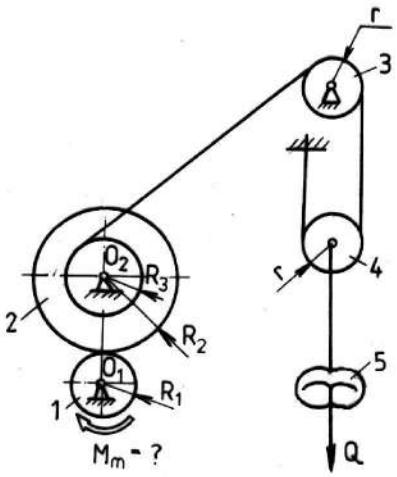


Fig. 15.38

unde

$$J_{red} = J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \frac{Q}{4g}\left(\frac{R_1 R_3}{R_2}\right)^2$$

20. Un transportor cu bandă este antrenat de un motor electric ce dezvoltă un cuplu de moment Mm. Să determine accelerația unui corp de greutate P, aşezat pe bandă. Se cunosc razele R şi greutățile G ale rolelor de antrenare şi susținere (fig. 15.39). Banda transportoare formează unghiul α cu orizontala.

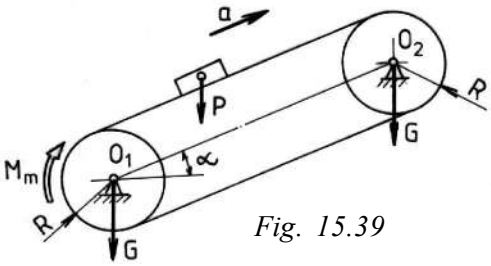


Fig. 15.39

R:

$$a = \frac{(M_m - PR\sin\alpha)}{R(P+G)}g$$

21. Sistemul de bare articulat di figura 15.40 este format din barele 1 şi 2 de greutăți P_1 şi P_2 ce formează unghiul α între ele. Articulațiile O_2, O_1 şi A se află pe aceeaşi dreaptă iar $AO_1 = O_1O_2$. Bara O_2B se află în poziție verticală, perpendiculară pe AB. Să se determine forța din arc pentru poziția de echilibru din figură.

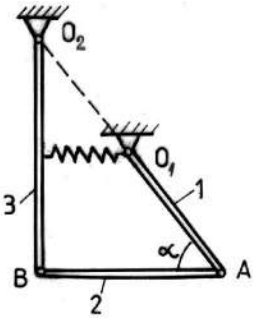


Fig.15.40

R: $F = (P_1 + P_2)\text{ctg}\alpha$

22. Mecanismul planetar din figura 15.41 este format din bara 1 articulată în O pe care sunt fixate roțile de raze R şi r. Asupra barei 1 acționează momentul M_1 iar asupra roții 2 momentul M_2. Dacă $O_1A = O_3B$, $O_1O_3 = 8R/3$, $R = 4R/3$, şi $AB \parallel O_1O_3$, să se determine legătura între M_1 şi M_2 pentru această poziție de echilibru a mecanismului.

R: $M_2 = \frac{9}{41}M_1$

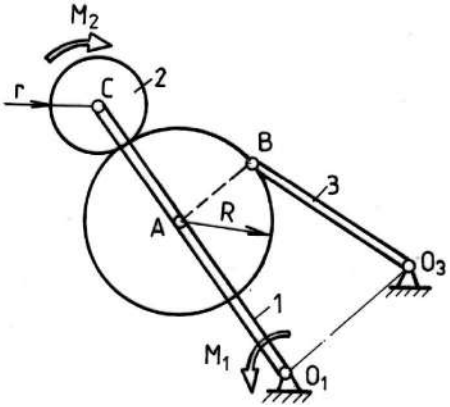


Fig.15.41

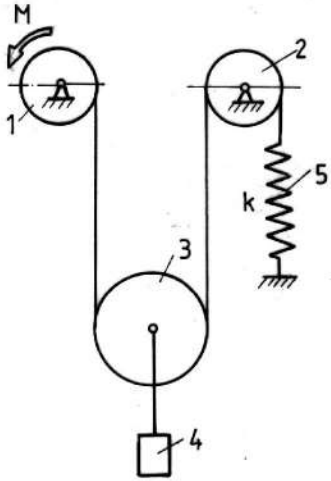


Fig. 15.42

15.7.23. Scripetele 3 cu axă mobilă de rotație, de greutate P este suspendat cu un fir peste scripeții 1 şi 2 de rază r (fig. 15.42). De axul scripetelui 3 este fixat cu un fir corpul 4 de greutate Q. Să se determine momentul M ce acționează asupra roții 1 pentru echilibrul sistemului de corpuri şi deformația arcului de constantă k, corespunzătoare acestei poziții de echilibru.

R: $M = \frac{(P+Q)r}{2}$; $f = \frac{(P+Q)}{2k}$

BIBLIOGRAFIE

1. CEAUŞU, V., ENEŞAN, N. - *Probleme de mecanică,* Editura "Corifeu", Bucureşti, 2002.

2. BACRIA,V., - *Macanică*, I.P. "Traian Vuia", Timişoara,1980.

3. BEER, P.F., JOHNSTON, R.E., - *Vector Nechanics for Engineers - Dinamics*. Mc Graw - Hill Companies, New York, 1996.

4. BÎRSAN,G.M., ALEXA,P., BORS,I., - *Mecanica*, vol. I,II, I.P. Cluj-Napoca, 1983.

5. BRINDEU,L., - *Mecanică-Dinamică*, I.P. "Traian Vuia", Timişoara,1981.

6. BUTENIN,I.V.,LUNT,I.L.,MERKIN,D.R., - *Kurs teoreticeskoi mehaniki*, tom I,II, "Nauka", Moskva, 1985.

7. CÂNDEA,I. şi colectiv, - *Mecanica*, Univesitatea "Transilvania" Braşov, 1992.

8. CÂNDEA. I., CONSTANTIN, FL., şi alţii, - *Mecanica - Statica - Teorie şi aplicaţii*. Editura Universităţii Transilvania din Braşov, 2002.

9. CONSTANTIN,Fl., - *Mecanică*, Universitatea din Braşov, 1989.

10. CONSTANTIN,Fl., - *Mecanica-Statica*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1991.

11. CONSTANTIN,Fl., şi colectiv,- *Mecanica-Cinematica*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1993.

12. CONSTANTIN,Fl., şi colectiv, - *Mecanica-Culegere de probleme - Statica* - Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1996.

13. CONSTANTIN,Fl., COTOROS L., - *Mecanică - Teorie şi aplicaţii*. - , Editura "Lux Libris", Braşov, 1996.

14. CONSTANTIN,Fl. şi colectiv - *Mecanica, Statica - Culegere de probleme* - Editura "Elida", Braşov, 2000.

15. CONSTANTIN, FL., SECARĂ, E. - *Culegere de probleme - Dinamica.*Editura "Lux Libris", Braşov, 2003.

16. CONSTANTIN, FL. *Probleme de mecanică - Cinematica şi dinamica.*Editura "Lux Libris", Braşov, 2004.

17. CONSTANTIN, FL. - *Statica şi aplicaţiile ei tehnice.* Editura "Tehnopress", Iaşi, 2005.

18. CONSTANTIN FL. - *Aplicaţii ale staticii în construcţii*. Editura "Lux Libris" Braşov, 2008.

19. KITTEL,C.,KNIGHT,W.,RUDERMAN,M., - *Mechanics* - Berkeley Physics Cours,vol.I E.D.P., Bucureşti, 1981 (traducere).

20. KOLESNIKOV,K.S. şi colectiv, *Sbornik zadaci po teoreticeskoi mehanike*, "Nauka", Moskva, 1983.

21. LUGOJANU, RUX., ENESCU, I., - *Mecanica* - Editura "Lux Libris", Braşov, 1998.

22. MESCHCHERSKY,I.V., -*Collection of problems in theoretical mecanics*, The higher school publishing house, Moscow,1968.

23. MOSU,N.,CONSTANTIN,Fl., - *Mecanică*, Universitatea din Braşov, 1981.

24. MOSU,N.,DELIU, Gh.,LUGOJANU, R.,ACHIRILOAIE,P., CONSTANTIN,Fl., - *Mecanica tehnică - pentru subingineri*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1979.

25. MOSU,N., DELIU,Gh., SIRBU,N., CÂNDEA,I., CONSTANTIN,Fl., DUMITRU,O., - *Mecanica pentru subingineri*, E.D.P. Bucureşti, 1981.

26. OLARIU,V., SIMA,P.,BENCHE,L., MOSU,N., DELIU,Gh.,

TOFAN,M., CÂNDEA,I., CONSTANTIN,Fl., LUGOJANU,R., VLASE,S., ROSCA,I., SECARĂ,E., SOFARIU,I., - *Mecanică - Lucrări de laborator*, Universitatea din Braşov, 1987.

27. OLARIU,V., SIMA,P.,BENCHE,L., MOSU,N., DELIU,Gh., TOFAN,M., CÂNDEA,I., CONSTANTIN,Fl., LUGOJANU,R., VLASE,S., ROSCA,I., SECARĂ,E., SOFARIU,I., - *Mecanică - Culegere de probleme*, vol.I,II Universitatea din Braşov, 1988.

28. PLAVITA,C., şi colectiv, - *Probleme de mecanică, fizică şi acustică*, E.D.P., Bucureşti, 1981.

29. POPA, AL., EPARU, N., RUSU, L. *Probleme de mecanică - Statica.* Editura Universității din Ploieşti, 2001.

30. POPOVICI,M.,STAICU,St., - *Mecanică tehnică* vol.I,II,III, Editura tehnică, Bucureşti,1982.

31. RADES,M., - *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1979.

32. RADOI,M.,DECIU,E., - *Mecanica*, E.D.P., Bucureşti, 1977.

33. RILEY, F.W., STURGES, D.L., - *Engineering Mechanics - Dinamics.* John Wiley & Sons, inc., New York, 1996.

34. RIPIANU,A. şi colectiv - *Culegere de probleme de mecanică tehnică*, vol.I,II, I.P. Cluj-Napoca, 1986.

35. RIPIANU,A., POPESCU,P., BALAN,B., - *Mecanică tehnică*, E.D.P., Bucureşti, 1979.

36. SARIAN,M., şi colectiv - *Probleme de mecanică*, E.D.P. , Bucureşti, 1975.

37. SECARĂ,E., CONSTANTIN, F., - *Mecanică - Teorie şi aplicații*, Editura Lux Libris, Braşov, 2000.

38. SECARĂ,E., *Mecanică - Statica*, Reprografia Universității din Braşov, Braşov, 1977.

39. SECARĂ, E., *Mecanică - Cinematica*, Editura Lux Libris, Braşov, 2000.

40. SERBU,AD., CURTU,I., LUGOJANU,R., MUNTEANU,M., BOLFA,TR., - *Mecanică şi rezistența materialelor - Culegere de probleme*, Universitatea dinBraşov, 1978.

41. SIMA,P., OLARIU,V., MACOVEI,M., - *Mecanică tehnică, Aplicații - Statica,* Editura tehnică, Bucureşti, 1990.

42. VLASE, S. - *Dinamica.* Editura Infomarket, Braşov, 2005.
43. VOINEA,R., VOICULESCU,D., CEAUŞU, - *Mecanică*, E.D.P. Bucureşti 1983.
44. *** *Probleme de mecanică* - date la concursurile profesional ştiinţifice, ed. lll-a, IP "Transilvania", Timişoara, 1981.

Bun de tipar la data de 05.03.2011
Tiraj 200 (CD)
Coli de tipar 118 - 21 x 29,8
Tiparul S.C. ANIL COMPUTER s.r.l. Braşov

ISBN 978-973-131-104-3

EDITURA LUX LIBRIS
Brașov, 500123
Str. Beethoven, nr. 2A
tel/fax: 0268475031
mobil: 0788469432
e-mail: lux_libris@yahoo.com